Corso di laurea in Matematica - A. A. 2019/2020
AC310 - Analisi Complessa - Esercitazione 8
DOCENTE: MARGARIDA MELO

Esercizio 1. *Determinare il residuo delle seguenti funzioni i nei punti indicati*

(i) $\frac{z^3+3z-5}{z^3}$, $z = 0$;

(ii) $\frac{z^3}{(z-1)(z^4+2)}$, $z = 0$;

(iii) $\frac{1}{z^2-1}(z+2)$, $z = 1$;

(iv) $\frac{\sin z}{z^5}$, $z = 0$;

(v) $z^{-2}\log(1+z)$, $z = 0$.

Esercizio 2. *Sia* $p(z) := z^n - 1$ *un polinomio.*

(i) Fatorizzare $p(z)$ *in fattori di grado* 1*;*

(ii) Trovare il residuo di $\frac{1}{p(z)}$ *in* $z = 1$*;*

(iii) Calcolare $\int_\gamma \frac{1}{p(z)}dz$*, dove* γ *è la circunferenza di centro* 1 *e raggio* $\frac{\pi}{n}$*, orientata in senso antiorario.*

Esercizio 3. *Sia* C *il rettangolo di vertici* $(0,0), (10,0), (10,4)$ *e* $(0,4)$*, orientato in senso orario. Calcolare* $\int_C f(z)dz$*, dove* $f(z)$ *è:*

(i) $f(z) = \frac{1}{z^2-3z+5}$;

(ii) $f(z) = \frac{1}{z^2+z+1}$;

(iii) $f(z) = \frac{1}{z^2-z+1}$.

Esercizio 4. *Sia* C *la cinconferenza di raggio* 8 *e centro nell'origine. Calcolare* $\int_C f(z)dz$*, dove* $f(z)$ *è:*

(i) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$;

(ii) $f(z) = \frac{1+z}{1-e^z}$;

(iii) $f(z) = \frac{1}{1-\cos z}$;

(iv) $f(z) = \tan z$.

Esercizio 5. *Mostrare che*

$$\int_{|z|=1} \frac{\cos e^{-z}}{z^2} dz = 2\pi i \sin 1.$$

Esercizio 6. *Si determini il numero di zeri del polinomio* $p(z) = 2z^5 - 6z^2 + z + 1$ *nella corona circolare* $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\}$.

Esercizio 7. *Sia* f *una funzione analitica nel disco unitario chiuso* $\overline{D_1(0)}$. *Mostrare che:*

(i) se f *non è costante e, per* $|z| = 1$, $|f(z)| = 1$, *allora l'immagine di* f *contiene il disco unitario.*

(ii) se esiste un punto $z_0 \in D_1(0)$ *tale che* $|f(z_0)| < 1$ *e se, per* $|z| = 1$, $|f(z)| \geq 1$, *allora* $f(D_1(0))$ *contiene il disco unitario.*

Esercizio 8. *Siano* f *e* h *funzioni analitiche in* $\overline{D_R(0)}$ *e assumiamo che* $f(z) \neq 0$ *per* $z \in D_R(0)$. *Mostrare che esiste* $\epsilon > 0$ *tale che* f *e* $f + \epsilon h$ *hanno lo stesso numero di zeri in* $D_R(0)$.

Esercizio 9. *Usando calcolo dei residui, mostrare che*

(i) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+1} dx = \frac{2\pi}{3}$;

(ii) $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^n} dx = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}, \ \forall n \geq 2$;

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx = \pi \frac{\sqrt{2}}{2}$;

(iv) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{x^5-1} dx = \frac{4\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5}$;

(v) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1} dx = \pi e^{-a}$ *se* $a > 0$;

(vi) $\int_{0}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$.