1 - i) $\operatorname{Res}_{z=0} \dfrac{z^3+3z-5}{z^3} = \operatorname{Res}_{z=0}\left(1+\dfrac{3}{z^2}-\dfrac{5}{z^3}\right) = 0.$

ii) $\operatorname{Res}_{z=0} \dfrac{z^3}{(z-1)(z^4+2)} \underset{\uparrow}{=} 0$

la funzione è olomorfa in $z=0$.

iii) $\operatorname{Res}_{z=1} \dfrac{1}{(z^2-1)}(z+2) = \operatorname{Res}_{z=1} \dfrac{1}{(z-1)} \underbrace{\dfrac{z+2}{z+1}}_{\text{olomorfa in } z=1} = 1 \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$

iv) $\operatorname{Res}_{z=0} \dfrac{\sin z}{z^5} = \operatorname{Res}_{z=0} \underbrace{\dfrac{1}{z^5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}} = 0$

sviluppo sarà nullo nei termini di ordine pari.

v) $\operatorname{Res}_{z=0} z^{-2} \log(1+z) = \dots = 1.$

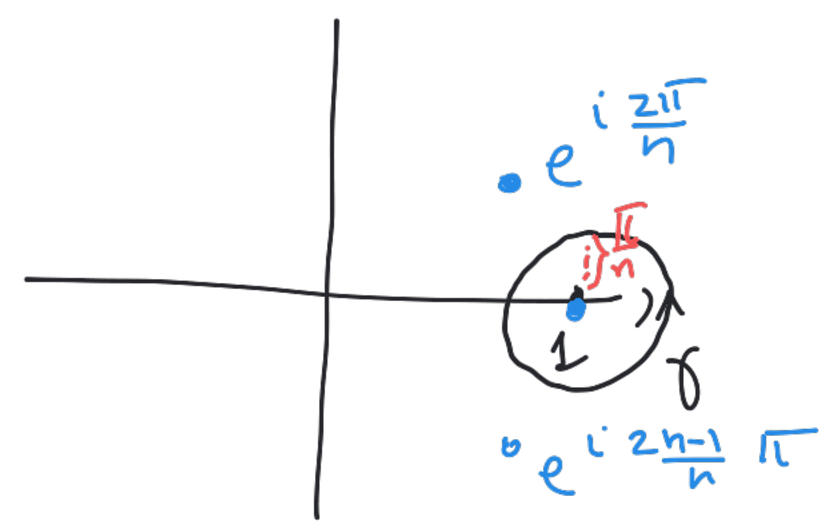
2. i) $p(z) = z^n - 1$

zeri di $p(z)$: $z^n = 1 \iff z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \quad k=0,1,\dots,n-1$

$$p(z) = (z-1)\left(z-e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)\dots\left(z-e^{i\frac{2n-1}{n}\pi}\right)$$

ii) Per calcolare il residuo in $z=1$:
siccome $p(1)=0$ ma 1 è un zero di ordine 1,
($p'(z)=nz^n$, $p'(1)\neq 0$). $\operatorname{Res}_{z=1}\dfrac{1}{p(z)} = \dfrac{1}{p'(z)}\Big|_{z=1} = \dfrac{1}{nz^n}\Big|_{z=1} = \dfrac{1}{n}$ //.

iii) Siccome il raggio di γ è $\frac{\pi}{n}$,
solo il polo $z=1$ di $\dfrac{1}{p(z)}$ è interno a γ.

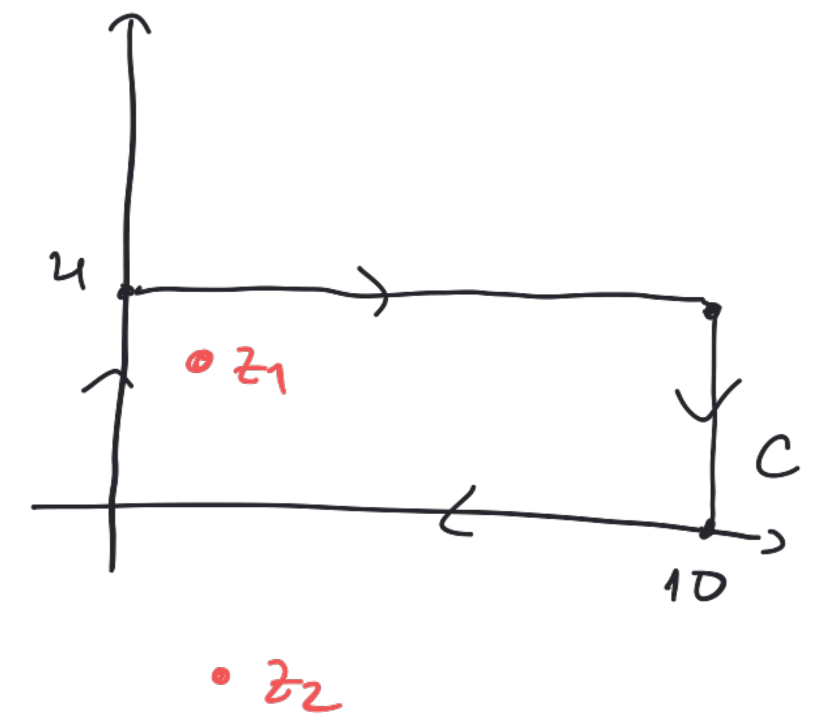


Otteniamo quindi

$$\int_\gamma \frac{1}{p(z)}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=1}\frac{1}{p(z)} = \frac{2\pi i}{n}.$$

3.

i) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 3z + 5}$



$$z^2 - 3z + 5 = 0 \iff z = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 20}}{2} \iff$$

$$\iff z = \frac{3 \pm i\sqrt{11}}{2} \iff z = z_1 = \frac{3 + i\sqrt{11}}{2}$$

o

$$z = z_2 = \frac{3 - i\sqrt{11}}{2}$$

$$\Rightarrow \int_C f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) = -2\pi \cancel{i} \cdot \frac{1}{\cancel{i}\sqrt{11}} = -\frac{2\pi}{\sqrt{11}}$$

$$p(z) = z^2 - 3z + 3$$

$$p'(z) = 2z - 3 \Rightarrow p'(z_1) = 3 + i\sqrt{11} - 3 = i\sqrt{11}$$

ii) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2+z+1}\,dz = 0.$ non ci sono singolarità di f all'interno di C.

iii) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2-z+1}\,dz \underset{(\dots)}{=} -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$

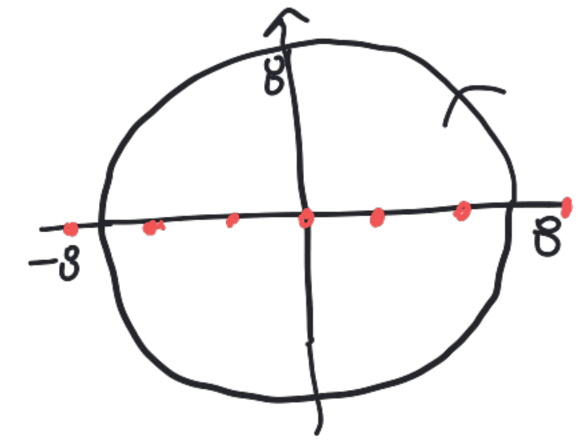
5. $$\int_{|z|=1} \frac{\cos e^{-z}}{z^2}\,dz = 2\pi i \sin 1.$$

Sia $f(z)=\cos e^{-z}$, che e' una funzione olomorfa in $\mathbb{C}$ (o intera).

Allora, per la formula int. di Cauchy per le derivate,

$$2\pi i \underbrace{f'(0)}_{\sin 1} = \int_{|z|=1} \frac{\cos e^{-z}}{z^2}\,dz$$

e quindi si ha la formula desiderata.



4 i) $\displaystyle\int_C \frac{1}{\sin z}\,dz = 2\pi i\left((-1)^2+(-1)^{-1}+(-1)^0+(-1)+(-1)^2\right)$

$= 2\pi i$.

$\sin z = 0 \iff z = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

e $\displaystyle \operatorname{Res}_{z=\pi k}\frac{1}{\sin z} = \dots = (-1)^k$

ii) $\displaystyle\int_C \frac{1+z}{1-e^z}\,dz = 2\pi i\Big(\underbrace{\operatorname{Res}_{z=0} f(z)}_{=1} + \underbrace{\operatorname{res}_{z=-2\pi i} f(z)}_{=-(1-2\pi i)} + \underbrace{\operatorname{res}_{z=2\pi i} f(z)}_{=-(1+2\pi i)}\Big)$

$= \dots = -6\pi i$

iii) $\displaystyle\int_C \frac{1}{1-\cos z}\,dz = 0$ (tutti i residui di $f(z)$ sono uguali a 0.

iv) $\displaystyle\int_C \tan z\,dz = -\int_C \frac{\overset{f'(z)}{-\operatorname{sen} z}}{\underset{f(z)}{\cos z}}\,dz \underset{\uparrow}{=} -2\pi i\,\#\{\text{zeri di } f \text{ in } C^0\}$

Princ. argomento

$= -12\pi i$.

6 Sia $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\}$ e $p(z) = 2z^5 - 6z^2 + z + 1$.

Sia $p_1(z) := -6z^2$ e $p_2(t) = 2z^5$.

Sia $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$.

T. Rouché si può applicare in $\overline{D_1}$ a $p(z)$ e $p_1(z)$.

Infatti, $\forall z \in \partial D_1 = C_1$, $|p(z) - p_1(z)| = |2z^5 + z + 1|$

$|z| = 1$

$$\leq |2z^5| + |z| + 1 = 2 + 2 = 4$$

$$< |-6z^2| = |p_1(z)|$$

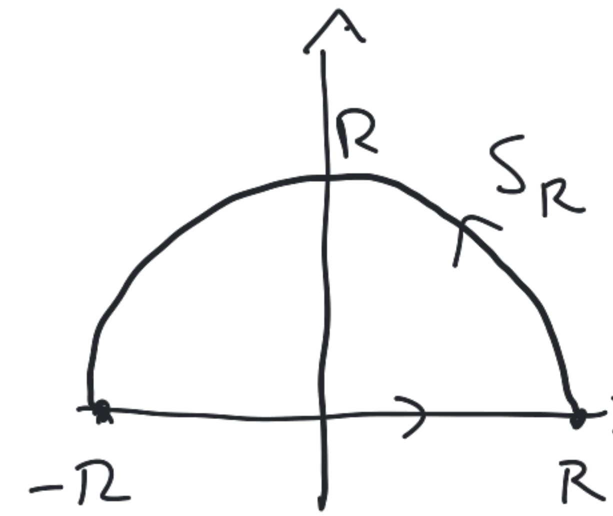
Quindi $p(z)$ e $p_1(z)$ hanno lo stesso numero di zeri su $\mathrm{int}(C_1) = D_1$ e nessun zero in C_1.

$\Rightarrow$ $p(z)$ ha 2 zeri (contati con molteplicità) in D_1.

Analogamente, T. Rouché applicato a $p(z)$ e $p_2(z)$ in D_2 implica che $p(z)$ ha 5 zeri in D_2 e nessun zero in ∂D_2.

$\therefore$ $p(z)$ ha 3 zeri in A.

9 i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^6+1}\,dx = \frac{2\pi}{3}$



Consideriamo la curva $C_R = S_R \cup [-R, R]$ come nella figura.

Come abitualmente facciamo,

$$\left|\int_{S_R} \frac{1}{1+z^6}\,dz\right| \le L(S_R)\cdot \sup_{z\in C}\left|\frac{1}{1+z^6}\right| \le \pi R \cdot \frac{1}{R^6}$$

Quindi $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\left|\int_{R}\frac{1}{1+z^6}\,dz\right| = 0$ e quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^6+1}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{1}{x^6+1}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1}{z^6+1}\,dz$$

$$= 2\pi i \sum\left\{\text{residui di } \frac{1}{z^6+1} \text{ nel semipiano superiore}\right\}.$$

I poli di $\frac{1}{1+z^6}$ nel semipiano superiore sono

$z_1 = e^{\frac{i\pi}{6}}$, $z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ e $z_3 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$, che sono poli semplici,

e quindi $\operatorname{Res}_{z_i}\left(\frac{1}{1+z^6}\right) = \left(\frac{1}{1+z^6}\right)'\Big|_{z=z_i}$.

Otteniamo quindi che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^6}\,dx = 2\pi i\left(\frac{e^{-\frac{5i\pi}{6}}}{6} + \frac{e^{-\frac{5i\pi}{2}}}{6} + \frac{e^{-25i\frac{\pi}{2}}}{6}\right)$$

$$= \dots = \frac{2\pi}{3}.$$