Corso di laurea in Matematica - A. A. 2019/2020

AC310 - Analisi Complessa - Esercitazione 9

Docente: Margarida Melo

Esercizio 1. *Siano F e G trasformazioni lineari fratte. Mostrare che $F \circ G$ è ancora una trasformazione lineare fratta.*

Esercizio 2. *Siano $T_1 : z \mapsto \frac{z+2}{z+3}$, $T_2 : z \mapsto \frac{z}{z+1}$, scrivere $T_1 \circ T_2$, $T_2 \circ T_1$, $T_1^{-1} \circ T_2$.*

Esercizio 3. *Mostrare che la coniugazione complessa $z \mapsto \bar{z}$ non si può scrivere come una trasformazione lineare fratta.*

Esercizio 4. *Mostrare che ogni trasformazione lineare fratta che mappi l'asse reale in se stesso si può scrivere con coefficienti reali.*

Esercizio 5. *Determinare la trasformazione lineare fratta che mappa*

(i) $(0, 1, \infty)$ *in* $(1, \infty, 0)$;

(ii) $(0, 1, 2)$ *in* $(1, 0, \infty)$;

(iii) $(0, 1, \infty)$ *in* $(-1, -i, 1)$;

(iv) $(0, i, -i)$ *in* $(1, -1, 0)$;

(v) $(1, i, -1)$ *in* $(i, -1, 1)$.

Esercizio 6. *Determinare* una *trasformazione lineare fratta che mappa*

(i) $\mathbb{R}$ *in* $i\mathbb{R}$;

(ii) $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{S}^1$;

Esercizio 7. *Si consideri la trasformazione lineare fratta*

$$F(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$

(i) Mostrare che F induce un'isomorfismo tra il semipiano superiore $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ e il disco unitario $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

(ii) Determinare l'imagine tramite F della retta reale $\mathbb{R}$.

Esercizio 8 (Lemma de Schwarz-Pick)**.** *Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una mappa olomorfa. Mostrare che, per ogni $a \in \mathbb{D}$, si ha che*

$$\frac{|f'(a)|}{1 - |f(a)|^2} \leq \frac{1}{1 - |a|^2}.$$