Esercitazione 9

1. Sia $F(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $G(z) = \dfrac{a'z+b'}{c'z+d'}$, con $ad-bc \neq 0$, $a'd'-b'c' \neq 0$.

Allora $$G \circ F(z) = \frac{a'\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)+b'}{c'\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)+d'} = \frac{(a'a+b'c)z + a'b + db'}{(c'a+cd')z + c'b + dd'}$$

e $(a'a+b'c)(c'b'+dd') - (a'b+db')(c'a+cd') \neq 0$!

F è associata alla matrice $M_F := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$

G " " " $M_G = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$ $\cup$

$G \circ F$ è associata alla matrice $M_G \cdot M_F = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'a+b'c & a'b+b'd \\ c'a+d'c & c'b+d'd \end{bmatrix}$

e siccome $M_G \cdot \Pi_F$ è chiaramente invertibile, concludiamo.

5\. i) Trovare una t. l. f. che manda $(0,1,\infty)$ in $(1,\infty,0)$

$z \longmapsto \frac{1}{z}$ manda ∞ in 0

$z \longmapsto \frac{1}{z-1}$ manda 1 in ∞ e $\left|\begin{array}{l}\infty \text{ in } 0 \\ 0 \text{ in } -1\end{array}\right.$

$z \longmapsto -\frac{1}{z-1} = \frac{1}{-z+1}$ è la trasformazione desiderata.

(ii) $(0,1,2)$ in $(1,0,\infty)$.

$z \longmapsto \frac{1}{z-2}$ manda 2 in ∞

$z \longmapsto \frac{z-1}{z-2}$ manda 2 in ∞ e 1 in 0

$\left.\right\}$ $z \mapsto \underbrace{\frac{z-1}{z-2} \cdot 2}$ $= \frac{2z-2}{z-2}$ è la trasf. voluta.

8. Sia $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ olomorfa e consideriamo

$$g(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z} \quad , \quad h(z) = \frac{f(a)-z}{1-\overline{f(a)}\,z} \quad ,$$

che sono automorfismi del disco $\mathbb{D}$ e t.c.

$$g(a)=0, \quad h(f(a))=0.$$

Sia $F(z) = h \circ f \circ g\,(z)$. Per la regola della catena,

$$F'(0) = h'(f \circ g(0)) \cdot f'(g(0)) \cdot g'(0) = h'(f(a)) \cdot f'(a) \cdot g'(0).$$

Siccome $\underset{(\ldots)}{g'(0)} = -1 + |a|^2$ e $h'(f(a)) = \frac{-1}{1-|f(a)|^2}$,

concludiamo che

$$F'(0) = \frac{f'(a)\,(|a|^2-1)}{1-|f(a)|^2} .$$

Siccome $F(0)=0$, possiamo applicare il Lemma di Schwarz a F.

Quindi, $\forall z \in D$, $\left|\frac{F(z)}{z}\right| \leq 1 \Rightarrow |F'(0)| \leq 1$

Ma allora $F'(0) = \left|\frac{f'(a)\,(|a|^2-1)}{1-|f(a)|^2}\right| \leq 1$

$$\Rightarrow \forall a \in D, \quad \frac{|f'(a)|}{|1-|f(a)|^2|} \leq \frac{1}{||a|^2-1|}$$

$$\Leftrightarrow \forall a \in D, \quad \frac{|f'(a)|}{1-|f(a)|^2} \leq \frac{1}{1-|a|^2}$$

$\uparrow$

$f(a) \in D$

e $a \in D$