

Corso di laurea in Matematica - A. A. 2019/2020
AC310 - Analise Complessa - Foglio di esercizi 1
Consegnare a ricevimento o per email entro 20/03/2020

Esercizio 1.

Sia $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una funzione olomorfa in un aperto $U \subset \mathbb{C}$.

- (i) Se f non è mai nulla in U , mostrare che $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ è olomorfa in U e determinare una formula per la sua derivata.
- (ii) Si dimostri che in coordinate polari $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, valgono le equazioni di Cauchy-Riemann polari:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Esercizio 2. Si dimostri che, se $|z| \neq 1$, esiste $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{z^n - 1}{z^n + 1} \right)$. Esiste una funzione continua su \mathbb{C} che ristretta a $\mathbb{C} \setminus \{|z| = 1\}$ coincida con f ?

Esercizio 3. Mostrare che la mappa esponenziale complessa è un rivestimento da \mathbb{C} a \mathbb{C}^* .

Esercizio 4. Per ogni numero complesso $\alpha \in \mathbb{C}$, si consideri la serie di potenze formale

$$(1 + T)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} T^n = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)}{n(n - 1) \dots 1} T^n \in \mathbb{C}[[T]]$$

- (i) Dimostrare che il raggio di convergenza R di $(1 + T)^\alpha$ è uguale a

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \in \mathbb{N}, \\ 1 & \text{se } \alpha \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

- (ii) Dimostrare che per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ valgono le seguenti identità tra serie di potenze formali

$$(1 + T)^\alpha = \exp(\alpha \log(1 + T)) \quad \text{e} \quad \log(\exp(T)) = T$$

dove $\exp(T)$ e $\log(1 + T)$ sono le serie di potenze formali in $\mathbb{C}[[T]]$ definite da

$$\exp(T) := \sum_{n \geq 0} \frac{T^n}{n!} \quad \text{e} \quad \log(1 + T) := \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} T^n}{n}$$

(Sugg.: Considerare prima il caso $\alpha \in \mathbb{R}$ e successivamente osservare che il coefficiente in ciascuna serie è un polinomio in α .)

- (iii) Dimostrare che per ogni α e β complessi vale la seguente identità tra serie di potenze formali

$$(1 + T)^\alpha (1 + T)^\beta = (1 + T)^{\alpha + \beta}$$