

**Corso di laurea in Matematica - A. A. 2019/2020**  
**AC310 - Analise Complessa - Foglio di esercizi 2**  
(Consegnare entro 25/04/2020)

DOCENTE: MARGARIDA MELO

**Esercizio 1.** Siano  $f$  e  $g$  funzioni analitiche su  $\overline{D}_r(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$  tali che  $|f(z)| < |g(z)|, \forall z \in \overline{D}_r(0)$  e  $g(z) = cf(z), \forall z \in C_r := \partial(\overline{D}_r(0))$ , dove  $c \in \mathbb{C}$  è una costante. Mostrare che

1. La funzione  $h(z) := \frac{f(z)}{g(z)}$  è analitica in  $\overline{D}_r(0)$ ;
2. Vale l'uguaglianza  $g(z) = cf(z), \forall z \in \overline{D}_r(0)$ .

**Esercizio 2.** Calcolare  $\int_{\gamma} e^z$ , dove  $\gamma$  è un semicerchio di raggio 3 centrato nell'origine, percorso nel senso antiorario, da  $z = 3$  a  $z = -3$ . E se uniamo a  $\gamma$  il segmento che unisce  $z = -3$  a  $z = 3$ ?

**Esercizio 3.** Sia  $z_0 \in \mathbb{C}$  un punto fissato e sia  $C_R$  il cerchio di raggio  $R > 0$  e centro  $z_0$ , orientato in senso antiorario.

1. Calcolare  $\int_{C_R} (z - z_0)^n dz$ , per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ .
2. Sia  $f$  una funzione che ammette uno sviluppo

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

assolutamente convergente in  $D_{R'}(z_0)$ , con  $R' > R$ . Calcolare

$$\int_{C_R} f(z).$$

3. Concludere che la funzione  $g(z) = \frac{1}{z - z_0}$  non ammette primitiva in un intorno di  $z = z_0$ .

**Esercizio 4.** Sia  $e^w = \sum_{n \geq 0} \frac{w^n}{n!}$  la funzione esponenziale. Dimostrare che non esiste nessuna funzione olomorfa  $h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $e^{h(z)} = z$ , per ogni  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

**Esercizio 5.** Sia  $C_R$  la circonferenza di raggio  $R > 0$  centrata nell'origine e percorsa in senso antiorario.

(i) Calcolare  $\int_{C_R} g(z)$ , dove  $g(z) = \frac{|z|}{z}$ .

(ii) Mostrare che, se  $f$  è una funzione continua,

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{C_R} \frac{f(z)}{z} = 2i\pi f(0).$$