Corso di laurea in Matematica - A. A. 2019/2020

AC310 - Analise Complessa - Foglio di esercizi 3

(Consegnare entro 18/05/2020)

DOCENTE: MARGARIDA MELO

Esercizio 1. *Sia f una funzione intera tale che, in ogni espansione $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n(z-w)^n$, almeno uno dei c_n è 0. Dimostrare che f è un polinomio.*

Esercizio 2. *Dimostrare se può esistere o meno una funzione f, olomorfa in un intorno di 0, che soddisfi $\forall n \in \mathbb{N}$, una delle seguenti:*

(i) $f(\frac{1}{n}) = \exp(-n)$,

(ii) $2^{-n} < |f(\frac{1}{n})| < 2^{1-n}$.

Esercizio 3. *Sia A un aperto semplicemente connesso in $\mathbb{C}$ e sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa mai nulla. Dimostrare che esiste una funzione olomorfa $g : A \to \mathbb{C}$ tale che $f(z) = \exp(g(z))$ per ogni $z \in A$.*

Esercizio 4. *Dimostrare che, per ogni $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^{az}}{z} dz = 2\pi i$ e dedurne che*

$$\int_0^\pi e^{a\cos\theta}\cos(a\sin\theta)d\theta = \pi.$$

Esercizio 5. *Calcolare l'integrale della funzione $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z-1)^2}$ lungo la circonferenza di raggio 1 e centro 1.*

Esercizio 6. *Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa la cui parte reale è limitata superiormente. Dimostrare che f è costante.*

Esercizio 7.

1. *Dimostrare che la corrispondenza $f \to \dfrac{f'}{f}$ (dove f è olomorfa), manda prodotti in somme.*
2. *Se $P(z) = (z-a_1)\dots(z-a_n)$, dove $a_1,\dots,a_n$ sono le radici, a che è uguale $\dfrac{P'}{P}$?*
3. *Sia γ un cammino chiuso che non contiene nessuna delle radici di P. Mostrare che*
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{P'(z)}{P(z)}dz = W(\gamma, a_1) + \dots + W(\gamma, a_n).$$

Esercizio 8. *Sia $f(z) = (z-z_0)^m h(z)$, dove h è analitica in un insieme aperto U, e $h(z) \neq 0$ per ogni $z \in U$. Sia γ un cammino chiuso omologo a zero in U e che non contiene z_0. Mostrare che*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = W(\gamma, z_0)m.$$

Esercizio 9. *Mostrare che, per* $a > 0$, *la serie* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(a+n)^z}$ *rappresenta una funzione olomorfa in* $U = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 1\}$.

Esercizio 10. *Sia* f *una funzione analitica in* $\overline{D_b(z_0)}$, *con* $b > 0$. *Mostrare che*

$$\int\int_D f(x+iy)dxdy = f(z_0)A(D_b(z_0)),$$

dove $A(D_b(z_0)) = Area(D_b(z_0)) = \pi b^2$.

(Sug: Usare coordinate polari e la Formula di Cauchy. Cominciare per supporre che $z_0 = 0$.*)*

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione meromorfa* $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$. *Trovare lo sviluppo in serie di Laurent di* f *nelle seguenti regioni:*

(i) $R_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$;

(ii) $R_2 := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$;

(iii) $R_3 := \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z|\}$.