Corso di laurea in Matematica - A. A. 2019/2020

AC310 - Analise Complessa - Foglio di esercizi 4

(Consegnare entro 9/06/2020)

Docente: Margarida Melo

Esercizio 1. *Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Mostrare che f ha un polo di ordine m in z_0 se e soltanto se la funzione $g(z) := (z - z_0)^m f(z)$ è olomorfa in $D_r(z_0)$ e $g(z_0) \neq 0$.*

Esercizio 2. *Determinare e classificare le singolarità isolate e gli zeri delle seguenti funzioni:*

(i) $\tan z$;

(ii) $z \sin(\frac{1}{z})$.

Esercizio 3. *Dimostrare che la serie*

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{z}{z^2 - n^2}$$

definisce una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ con poli semplici negli interi.

Esercizio 4. *Sia U un'aperto connesso di $\mathbb{C}$ e $\mathfrak{M}(U)$ l'insieme delle funzioni meromorfe su U. Dimostrare che $\mathfrak{M}(U)$ è un campo che contiene il campo quoziente di $\mathfrak{H}(U)$, il dominio delle funzioni olomorfe su U.*

Esercizio 5. *Sia U un'aperto connesso di $\mathbb{C}$ e sia D un disco aperto tale che $\overline{D} \subset U$. Sia f una funzione analitica e non costante in U tale che $|f|$ è costante nel bordo di D. Mostrare che f ha almeno un zero in D. (*Sug. Considerare $g(z) = f(z) - f(z_0)$, per un $z_0 \in D$. *)*

Esercizio 6. *Sia C la circonferenza di centro nell'origine we raggio 8 orientata in senso antiorario. Calcolare*

$$\int_C \frac{1+z}{1-\sin z} dz.$$

Esercizio 7. *Per ogni intero $n \geq 2$, usare il Teorema dei residui per calcolare l'integrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx.$$

Esercizio 8. *Sia $S = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la sfera di Riemann. Mostrare che*

(i) Data una funzione meromorfa f in S,

$$\sum_{P \in S} \mathrm{ord}_P(f) = 0;$$

(ii) *Dati r punti $P_1, \dots, P_r \in S$ e r interi $m_1, \dots, m_r$ tali che*

$$\sum_{i=1}^{r} m_i = 0,$$

allora esiste una funzione meromorfa f in S tale che $\mathrm{ord}_{P_i} f = m_i$ e $\mathrm{ord}_P f = 0$, $\forall P \neq P_i$.

Esercizio 9. *Sia f una funzione meromorfa in $\mathbb{C}$ con un numero finito di poli. Definiamo il residuo di f in ∞ come*

$$\mathrm{res}_\infty f = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} f(z) dz$$

per $R >> 0$ in modo che tutte le singolarità di f hanno modulo minore di R. Mostrare che:

(i) *Il residuo di f in ∞ è ben definito;*

(ii) *La somma dei residui di f nelle singolarità e in ∞ è uguale a 0.*

Esercizio 10. *Trovare la trasformazione lineare fratta che manda $(i, -1, 1)$ in $(1, 0, \infty)$.*

Esercizio 11. *Si considei la trasformazione lineare fratta*

$$F(z) = \frac{z - i}{z + i}.$$

(i) *Mostrare che F induce un'isomorfismo tra il semipiano superiore $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ e il disco unitario $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.*

(ii) *Determinare l'imagine tramite F della retta reale $\mathbb{R}$.*

Esercizio 12. *(i)* *Siano $F = F_{a,b,c,d}$ e $F' = F_{a',b',c',d'}$ trasformazioni lineari fratte tali che $F(z) = F'(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Mostrare che esiste un numero complesso $\lambda \in \mathbb{C}$ such that $(a, b, c, d) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d)$.*

(ii) *Mostrare che il gruppo delle trasformazioni lineari fratte è isomorfo al gruppo $PGL_2(\mathbb{C}) := GL_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^\star$.*

Esercizio 13. *Sia $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una funzione analitica sul disco. Mostrare che se f fissa due punti distinti allora f è l'identità.*