III. §4 Integrale di una funzione olomorfa lungo un cammino continuo

Ric. Data $f: U \to \mathbb{C}$ olomorfa e $\gamma: [a,b] \to U$ curva diff., abbiamo definito

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$$

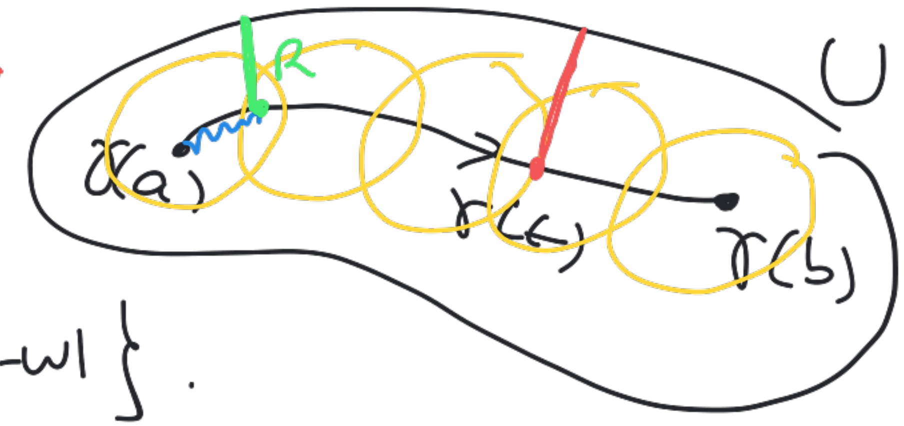
$\to$ Per $\gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ differenziabile a tratti,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)\,dz.$$

$\leadsto$ Usando l'esistenza della primitiva locale per una funzione olomorfa, possiamo definire $\int_\gamma f(z)\,dz$ usando questa primitiva e senza usare che γ sia differenziabile (né diff. a tratti). $\longrightarrow$ $\int_\gamma f(z)\,dz$, $\forall \gamma$ continua.

Lemma Sia $\gamma : [a,b] \longrightarrow U \subset \mathbb{C}$ una curva continua.
Allora esiste una partizione $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ di $[a,b]$
e dischi $\{D_0, \dots, D_n\}$ aperti contenuti in U t.c. $\gamma([a_i, a_{i+1}]) \subset D_i$, $i = 0, \dots, n-1$.

dim ⊗ $U \neq \mathbb{C}$
Sia $R := \text{dist}\{\text{Im}\,\gamma, U^c\} > 0$.



Infatti, sia
$$\varphi(t) := \text{dist}(\gamma(t), U^c) = \inf_{w \in U^c} \{ |\gamma(t) - w| \}.$$
Allora $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua e, essendo
$[a,b]$ compatto, $\exists \min_{t \in [a,b]} \{\varphi(t)\} = R$.

Prop 2.1.3 di Sernesi

Inoltre $R > 0$ perché U è aperto ($\varphi(t) = 0 \Rightarrow t \in \overline{U^c} = U^c$)

⊗ Se $U = \mathbb{C}$ ok

Siccome γ è continua e $[a,b]$ è compatto,

allora γ è uniformemente continua

$$\Rightarrow \underbrace{\exists\, \delta > 0 : |t - s| < \delta \Rightarrow |\gamma(t) - \gamma(s)| < \frac{R}{2}}$$

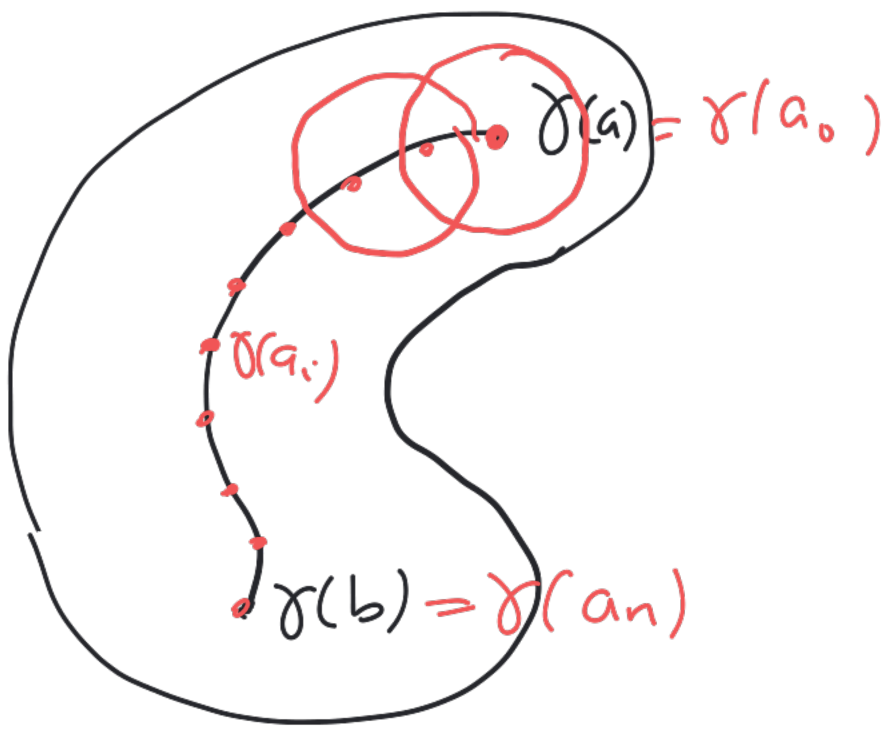
Suddividiamo $[a,b]$ in una partizione

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b \quad \text{t.c.} \quad a_{i+1} - a_i < \delta, \; i = 0, \dots, n-1.$$

Sia $\boxed{D_i := D_R(\gamma(a_i))}$, $i = 0, \dots, n-1$

Allora
- $\underbrace{D_i \subset U}$
- $\underbrace{\gamma([a_i, a_{i+1}])}\ \underbrace{\subset D_i}$

$$|\gamma(t) - \gamma(s)| < \frac{R}{2}$$
$$\forall\, t, s \in [a_i, a_{i+1}].$$



∎

Consideriamo la seguente

Def Sia $\gamma : [a,b] \to U$ continua e $f : U \to \mathbb{C}$ olomorfa.
Sia $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ e $D_0, D_1, \ldots, D_{n-1}$ dischi
come nel Lemma precedente ($\gamma([a_i, a_{i+1}]) \subset D_i \subset U$, $i = 0, \ldots, n-1$
Definiamo
$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz := \sum_{i=0}^{n-1} g_i(\gamma(a_{i+1})) - g_i(\gamma(a_i))},$$
dove g_i è una primitiva di f in D_i.

$\leadsto$ Vediamo che questa è una buona def.:

- Coincide con la def. precedente se γ diff
- non dipende dalla scelta della partizione, dei dischi D_i e della primitiva.

• Se γ è C^1 a tratti, allora otteniamo la vecchia definizione

perché $$\int_\gamma f = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma_i} f = \sum_{i=0}^{n-1} \left[g_i(\gamma(a_{i+1})) - g_i(\gamma(a_i)) \right]$$

possiamo prendere i punti della part. a_i contenenti i punti di raccordo.

usando il fatto che f ha una primitiva in D_i.

• Se γ è soltanto continua, la def. non dipende dalle scelte fatte:

– non dipende dalla scelta della primitiva g_i, perché ogni altra primitiva è della forma $g_i + c$, $c \in \mathbb{C}$

- non dipende dalla scelta dei dischi D_i:

Se $\tilde{D}_i$ disco t.c. $\mathrm{Im}\,\gamma_i \subset \tilde{D}_i \subset U$ e $\tilde{g}_i$ primitiva di f in $\tilde{D}_i$,

$\gamma_i = \gamma_{|[a_i, a_{i+1}]}$

allora

$D_i \cap \tilde{D}_i$ è aperto connesso

$\Rightarrow \quad g_i = \tilde{g}_i + c, \quad c \in \mathbb{C}$

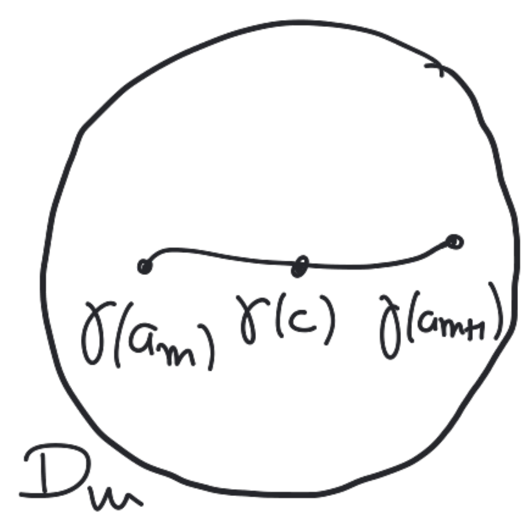
- non dipende dalla partizione fatta:

Basta mostrarlo per raffinamenti (due partizioni hanno sempre un raffinamento comune)

$a = a_0 < a_1 < \dots < a_m < a_{m+1} < \dots < a_n = b$

$\rightsquigarrow$

$a = a_0 < a_1 < \dots < a_m < c < a_{m+1} < \dots < a_n = b$



Se D_m è un disco che contiene $\gamma([a_m, a_{m+1}])$ e g_m primitiva di f in D_m,

$$g_m(\gamma(a_{m+1})) - g_m(\gamma(a_m)) =$$
$$= \left[g_m(\gamma(a_{m+1})) - g_m(\gamma(c))\right] + \left[g_m(\gamma(c)) - g_m(\gamma(a_m))\right] \quad \blacksquare$$

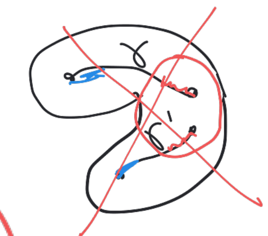
Def Siano $\gamma, \gamma' : [a,b] \longrightarrow U$.

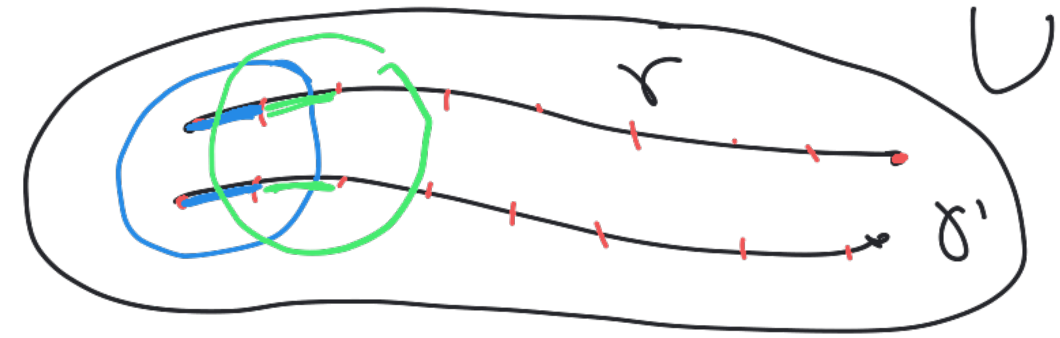
Diciamo che γ e γ' sono vicini in U se esiste una partizione $a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = b$ e dischi $\{D_0, D_1, \dots, D_n\}$ in U t.c.

$\gamma([a_i, a_{i+1}]) \subset D_i$

e

$\gamma'([a_i, a_{i+1}]) \subset D_i$





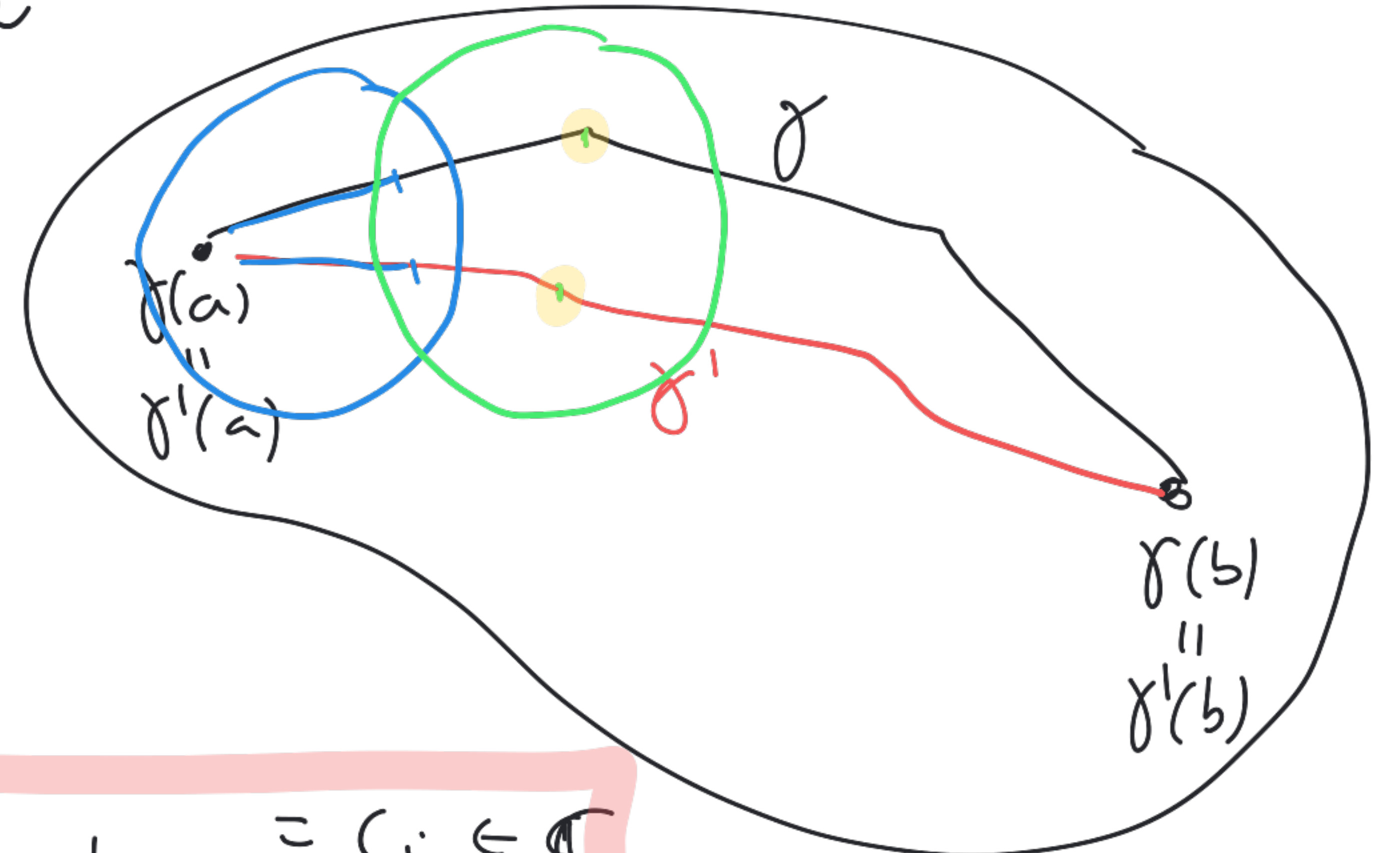
Lemma Siano $\gamma, \gamma' : [a,b] \longrightarrow U$ cammini (continui) vicini e sia $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Allora

- Se $\gamma(a) = \gamma'(a)$, $\gamma(b) = \gamma'(b)$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\int_\gamma f = \int_{\gamma'} f}$

  γ, γ' hanno lo stesso pt iniziale
  lo stesso pt finale

- Se γ e γ' sono entrambi chiusi $\Longrightarrow$ $\boxed{\int_\gamma f = \int_{\gamma'} f}$.

dim (1) Scegliamo una partizione e dischi D_i come nella def. di vicini. Sia g_i una primitiva di f in D_i.



Allora

$$\boxed{g_i\big|_{D_i\cap D_{i+1}} - g_{i+1}\big|_{D_i\cap D_{i+1}} = c_i \in \mathbb{C}}$$

$$\underset{\uparrow}{\Longrightarrow} \; g_{i+1}(\gamma(a_{i+1})) - g_{i+1}(\gamma'(a_{i+1})) = g_i(\gamma(a_{i+1})) - g_i(\gamma'(a_{i+1}))$$

$\gamma(a_{i+1}), \gamma'(a_{i+1}) \in D_i \cap D_{i+1}$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{esercizio}}}{\Longrightarrow} \int_\gamma f - \int_{\gamma'} f = 0.$$

$\big(\gamma(a_0) = \gamma'(a_0)$
$\gamma(a_{n+1}) = \gamma'(a_{n+1}) \big)$

(2) esercizio (vedere 4.4 Lang)

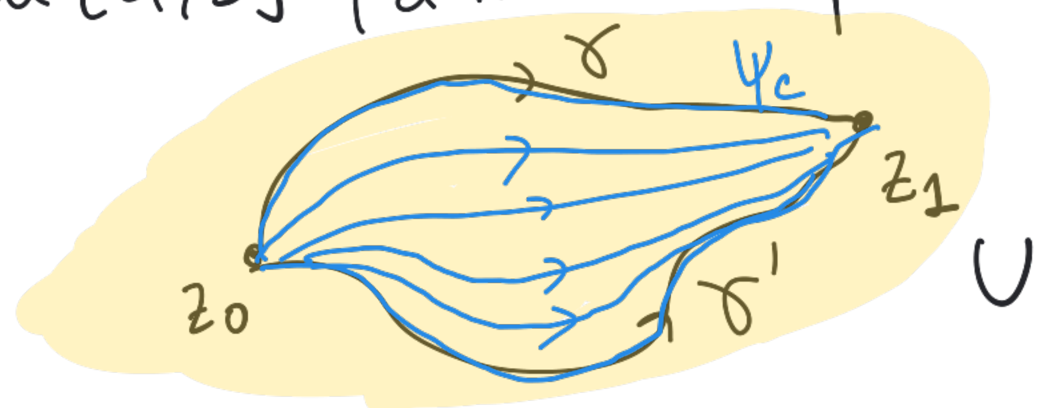
III § 5. La forma omotopica del teorema di Cauchy

Def Siano γ, γ' cammini (continui) in un'aperto U e assumiamo che entrambi γ, γ' siano definiti su $[a,b]$ (a meno di riparametrizzazione)

$$\gamma, \gamma' : [a,b] \longrightarrow U, \text{ con}$$

$$\gamma(a) = \gamma'(a) = z_0$$

$$\gamma(b) = \gamma'(b) = z_1$$



γ e γ' si dicono omotopi (come cammini), $\gamma \sim \gamma'$ in U se

$$\exists \quad \boxed{\psi : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow U} \quad \text{continua t.c. si ha}$$

- $\psi_c = \gamma$, $\psi_d = \gamma'$, $\psi_s = \psi_{[a,b] \times \{s\}} : [a,b] \longrightarrow U$, $s \in [c,d]$

- $\psi_s(a) = z_0$, $\psi_s(b) = z_1$, $\forall s \in [c,d]$.

Teorema [invarianza omotopica]

Sia $f: U \to \mathbb{C}$ olomorfa e γ, γ' cammini in U con $\gamma \sim \gamma'$ in U.

Allora $$\boxed{\int_\gamma f = \int_{\gamma'} f}$$

Oss. $\gamma \sim \gamma' \Rightarrow \gamma$ e γ' hanno gli stessi punti iniziali e finale

e.g. γ e γ' entrambi chiusi.

Oss. Se $\gamma \sim \{pt\}$ il teorema implica che $\int_\gamma f = 0$

dim (idea)

- Mostrare che, se γ e γ' sono omotope, allora

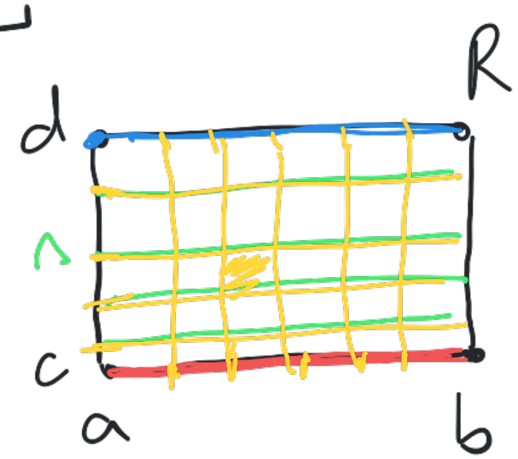
esiste una seguenza $\gamma = \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n = \gamma'$ t.c.

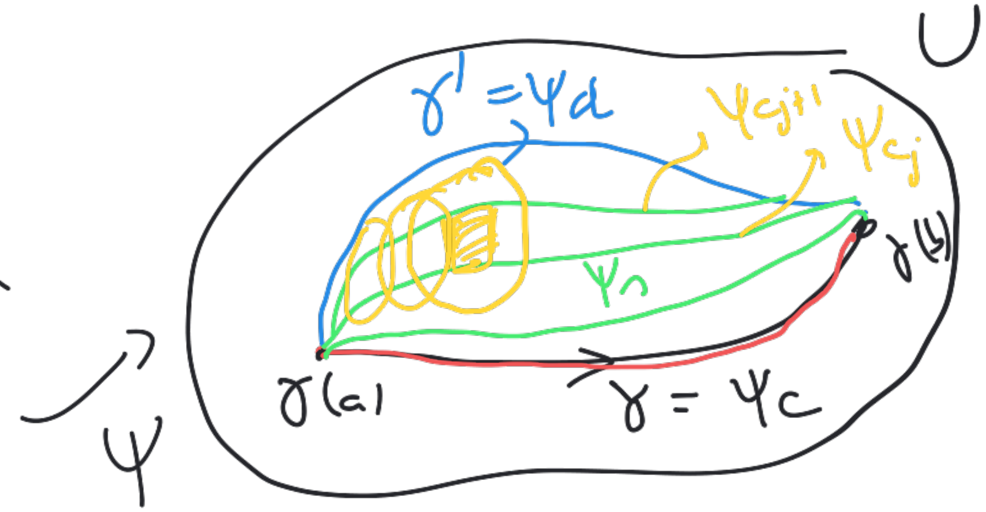
γ_i e' vicino a γ_{i+1}.

- Concludere usando il Lemma precedente.

Consideriamo

$$\psi : \underbrace{[a,b] \times [c,d]}_{= R} \longrightarrow U$$





Siccome $R = [a,b] \times [c,d]$ e' compatto, e ψ è continua,

$\psi(R)$ e' compatto, quindi $\operatorname{dist}(\psi(R), U^c) > 0$.

Per continuità uniforme, $\exists$ partizioni $\begin{cases} a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b \\ c = c_0 < c_1 < \dots < c_m = d \end{cases}$

e dischi $D_{ij} \subset U$

$$\psi([a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}]) \subset D_{i,j} \subset U, \quad \forall i, j$$

$\Rightarrow$ ψ_{c_j} vicino a $\psi_{c_{j+1}}$, $\forall j$

$$\Rightarrow \int_{\psi_{c_j}} f = \int_{\psi_{c_{j+1}}} f \quad \forall j \Rightarrow \boxed{\int_\gamma f} = \int_{\psi_{c_0}} f = \int_{\psi_{c_m}} f = \boxed{\int_{\gamma'} f}.$$

Esempio/Esercizio Sia $S \subset \mathbb{C}$ un' insieme convesso. Siano γ e γ' cammini contenuti in S, con gli stessi punti iniziale e finale. Allora γ e γ' sono omotope in S. (e.g. se γ e γ' sono cammini chiusi).

OSS. Vedere pag. 54, 55 appunti Sernesi per ripassare queste nozione topologiche. (49, 55)

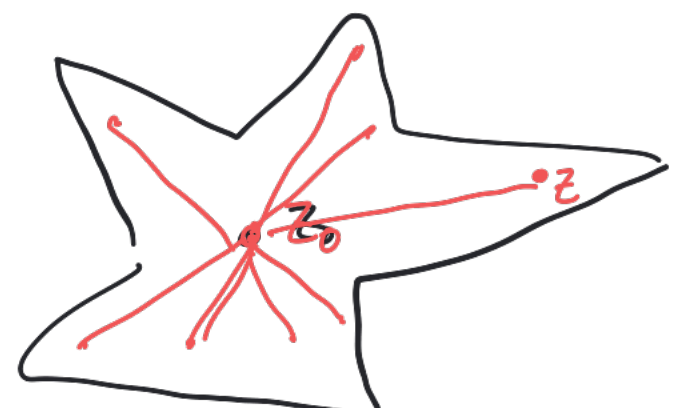
Def. Un' aperto U si dice semplicemente connesso se è connesso e se ogni cammino chiuso in U è omotopo a un punto.

Corollario Sia S semplicemente connesso e $\gamma \subset S$ cammino chiuso. Allora, $\forall f : S \to \mathbb{C}$ olomorfa, $\boxed{\int_\gamma f = 0}$

Sono esempi di sottoinsiemi semplicemente connessi in $\mathbb{C}$:

- $S \subset \mathbb{C}$ convesso
- $S \subset \mathbb{C}$ sottoinsieme stellato,

  i.e., $\exists\, z_0 \in S : \forall z \in S, \overline{z_0 z} \subset S$.



- $\mathbb{C} \setminus \{\text{semiretta}\}$