Formula globale di Cauchy

Ric: Formula locale di Cauchy

Se $\overline{D} \subset U$ un disco e $f : U \to \mathbb{C}$ olomorfa

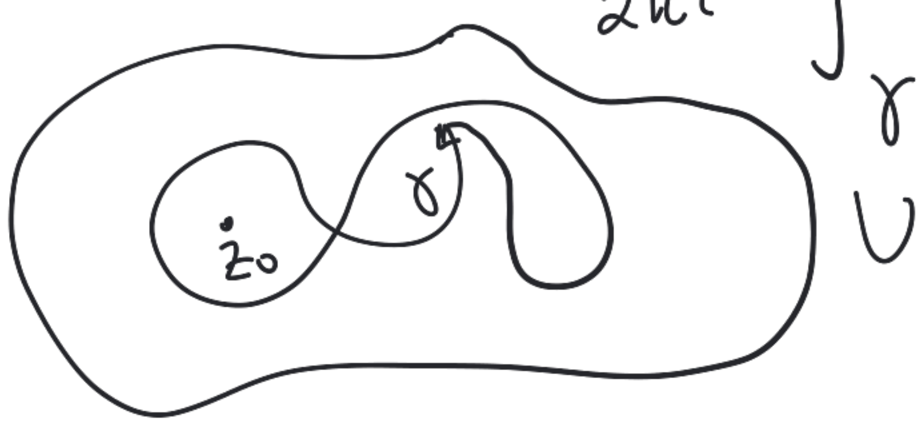
Allora, se $\gamma = \partial(\overline{D})$, $\forall z_0 \in D$,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

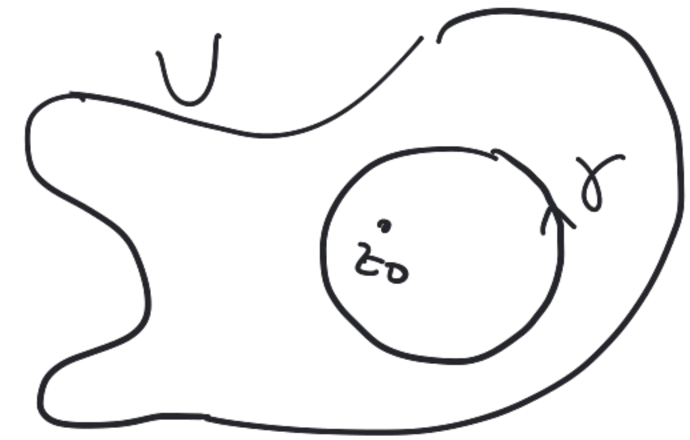
Scopo della formula globale di Cauchy:

Calcolare $\displaystyle \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$, $\forall \gamma \subset U$, $z_0 \in U \setminus \gamma$,

f olomorfa in U.



$\rightsquigarrow$ se $\gamma = \partial(\overline{D})$ e' un disco abbiamo che



- $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)$, se $z_0 \in int(\gamma)$
- $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 0$, se $z_0 \in ext(\gamma)$

$\rightarrow$ Sia γ_n una circonferenza percorsa n volte $(n \in \mathbb{Z}_{>0})$:

$$\gamma_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto e^{2\pi i n t}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} \frac{1}{z}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{2\pi i n\, \cancel{e^{2\pi i n t}}}{\cancel{e^{2\pi i n t}}}\,dt = n$$

Def [Indice o numero di avvolgimento (winding number)]

(curva = curva continua)

Sia γ una curva chiusa in $\mathbb{C}$ e sia $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \gamma$.

Definiamo il numero di avvolgimento / indice di γ rispetto a α come il numero intero $W(\gamma, \alpha) \in \mathbb{Z}$ t.c.

$$[\gamma] = W(\gamma, \alpha)\,[C] \quad \text{in } \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{\alpha\}) \cong \mathbb{Z}$$

dove C è la circonferenza (di un certo raggio) es. $R=1$) intorno ad α e percorsa in senso antiorario.

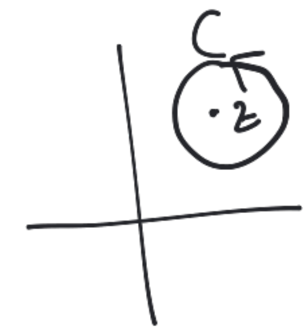
Infatti

- $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{\alpha\}) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$
- $[C] = 1$ in $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{\alpha\})$ è uno dei due generatori di questo gruppo

C

Oss. • $W(-\gamma,\alpha) = -W(\gamma,\alpha)$

• Se $\gamma = C$ è una circonferenza percorsa in senso antiorario, allora

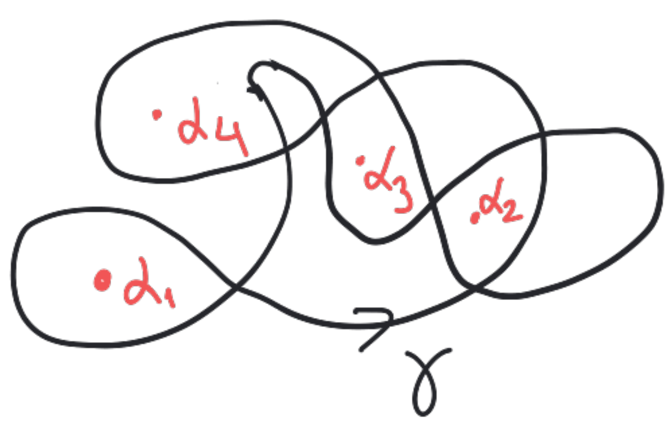


- $W(C,z)=0$ se $z \in est(C)$
- $W(C,z)=1$ se $z \in int(C)$

• Se $\gamma = C_n$ è una circonf percorsa n volte,

- $W(C,z)=0$ se $z \in est(C)$
- $W(C,z)=\underline{n}$ se $z \in int(C)$

Esempio



- $W(\gamma,\alpha_1) = 1$
- $W(\gamma,\alpha_4) = -1$
- $W(\gamma,\alpha_2) = 2$
- $W(\gamma,\alpha_3) = 0$

Lemma 1 Sia γ una curva chiusa in $\mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$.
Allora
$$\boxed{W(\gamma,\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-\alpha}\, dz}$$

dim $\frac{1}{z-\alpha}$ è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$

$$\Longrightarrow \int_\gamma \frac{1}{z-\alpha}\, dz = \int_{C^{W(\gamma,\alpha)}} \frac{1}{z-\alpha}\, dz ,$$

$\gamma \sim C^{W(\gamma,\alpha)}$ in $\mathbb{C}\setminus\{\alpha\}$ per definizione

dove $C^{W(\gamma,\alpha)}$ è il cappio C percorso $W(\gamma,\alpha)$ volte.

Quindi una parametrizzazione di $C^{W(\gamma,\alpha)}$ è data da

$$[0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\theta \longmapsto \alpha + e^{iW(\gamma,\alpha)\theta}$$

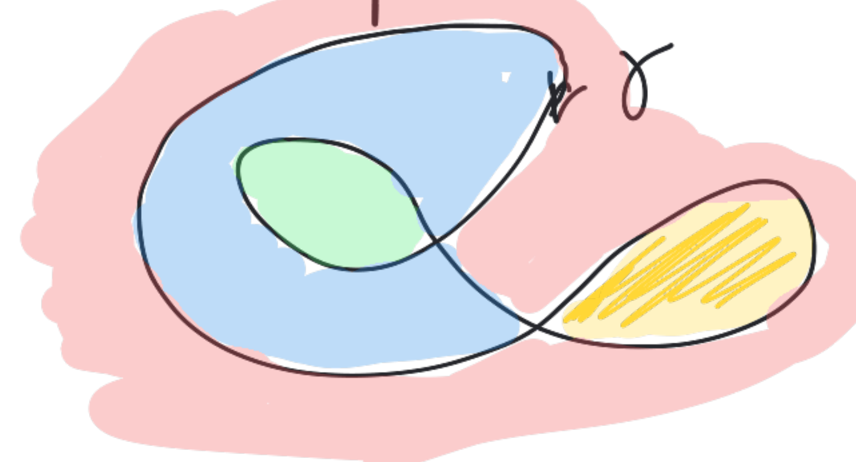
$$\Longrightarrow \int_{C^{W(\gamma,\alpha)}} \frac{1}{z-\alpha}\, dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{iW(\gamma,\alpha)}{e^{iW(\gamma,\alpha)\theta}} e^{iW(\gamma,\alpha)\theta}\, d\theta = 2\pi i\, W(\gamma,\alpha). \blacksquare$$

<u>Lemma 2</u> i) $\alpha \longmapsto W(\gamma, \alpha)$ è localmente costante.

In particolare, è costante su ogni componente connessa di $\gamma^c = \mathbb{C} \setminus \gamma$.

ii) $W(\gamma, \alpha) = 0$ se α appartiene ad una componente connessa di $\mathbb{C} - \gamma$ non limitata.



$\frac{\text{dim}}{\text{i)}}$ Consideriamo la funzione

$$W(\gamma, -) : \mathbb{C} \setminus \gamma \longrightarrow \mathbb{Z}$$

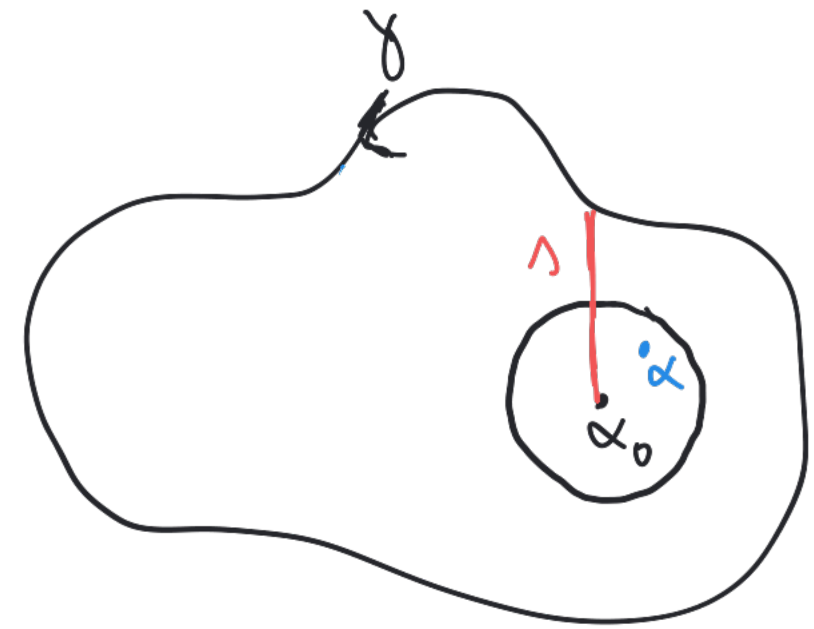
$$\alpha \longmapsto W(\gamma, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - \alpha} dz$$

Dobbiamo mostrare che $W(\gamma, -)$ è continua.

Usando poi il fatto che $\mathbb{Z}$ ha la topologia discreta, concludiamo che è localmente costante.

Dobbiamo mostrare che

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \int_\gamma \left[\frac{1}{z-\alpha} - \frac{1}{z-\alpha_0} \right] dz = 0$$



Sia $s = \text{dist}(\alpha_0, \gamma) > 0$

e $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una parametrizzazione di γ.

Allora $|\gamma(t) - \alpha_0| \geq s$, $\forall t \in [a,b]$.

Quindi, se α e' sufficientemente vicino a α_0, diciamo $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$,

allora $d(\alpha, \gamma) \geq s - \varepsilon$.

Infatti, se $\forall t$, $|\gamma(t) - \alpha_0| \geq s$, allora $\forall t \in [a,b]$,

$$|\gamma(t) - \alpha| + \overbrace{|\alpha - \alpha_0|}^{\leq \varepsilon} \geq |\gamma(t) - \alpha_0| \geq s \Rightarrow |\gamma(t) - \alpha| \geq s - \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \int_\gamma \left[\frac{1}{z-\alpha} - \frac{1}{z-\alpha_0} \right] dz \right| = \left| \int_\gamma \frac{\alpha - \alpha_0}{(z-\alpha)(z-\alpha_0)} \right| \leq \frac{|\alpha - \alpha_0|}{s(s-\varepsilon)} L(\gamma) \xrightarrow{\alpha \to \alpha_0} 0$$

(ii) Basta osservare che se $|\alpha| \to \infty$, allora

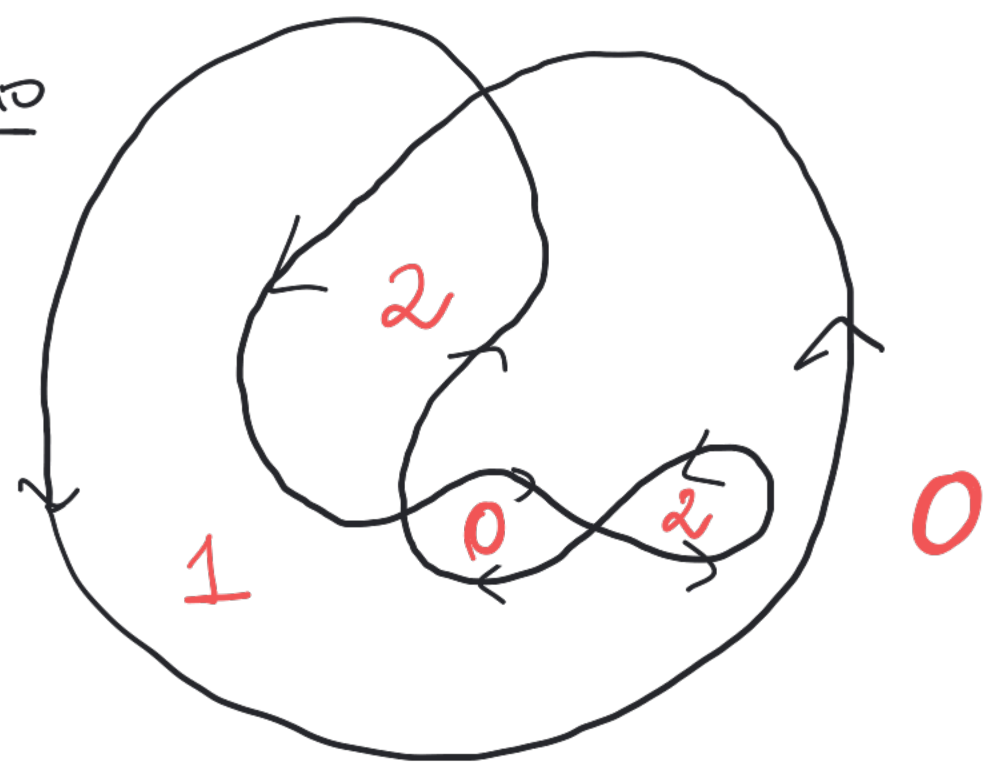
per valori di z in γ, $\left|\frac{1}{z-\alpha}\right| \longrightarrow 0$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{1}{z-\alpha}\, dz \xrightarrow[|\alpha|\to\infty]{} 0$$

Essendo $w(\gamma, \alpha)$ costante in tutta la cpt connessa,

concludiamo che $w(\gamma, \alpha) = 0$. ■

Esempio



$\mathbb{C} - \gamma$ ha 5 cpt connesse.

Def [Curve omologhe a 0 in U]

Sia γ curva chiusa in U. Allora γ e' omologa a 0 in U

se, equivalentemente:

i) U contiene tutte le componente connesse di $\mathbb{C}-\gamma$ con indice $\neq 0$.

ii) $W(\gamma, \alpha) = 0, \quad \forall \alpha \notin U$.

iii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z-\alpha}\, dz = 0, \quad \forall \alpha \notin U.$

Oss • γ omotopa a 0 in $U \Rightarrow \gamma$ omologa a 0 in U.

Infatti, $\dfrac{1}{z-\alpha}$ e' olomorfa in U, quindi

$\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z-\alpha}\, dz = 0$ per $\alpha \notin U$ per il teorema di invarianza omotopica

∘ Vice-versa è falso!

$U = \mathbb{C} \setminus \{p,q\}$

Allora γ è omologa a 0 in U!

$\rightsquigarrow w(\gamma, p) = 0 = w(\gamma, q)$

Sia γ_p cappio in senso antiorario intorno a p

γ_q " " " " " q

Allora la classe di γ in $\underbrace{\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{p,q\})}_{= \mathbb{Z} * \mathbb{Z}}$ è

$\gamma_q \circ \gamma_p^{-1} \circ \gamma_q^{-1} \circ \gamma_p$.

Teorema [Formula Globale di Cauchy]

Sia γ una curva chiusa in U omologa a 0 in U e sia $f: U \to \mathbb{C}$ olomorfa. Sia $z_0 \in U \setminus \gamma$, allora

$$\boxed{f(z_0) \cdot W(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz}$$

generalizza la formula locale di Cauchy

dim (Dixon) (pag 147)

(1) Sia

$$g: U \times U \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(z, w) \longmapsto g(z,w) = \begin{cases} \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{se } w \neq z \\ f'(z) & \text{se } w = z \end{cases}$$

Vediamo che

a) $\forall w \in U$, $g_w: U \to \mathbb{C}$, $z \mapsto g(z, w)$ è analitica (e analogamente con z fissato)

b) g continua su $U \times U$

a) $z \neq w$, OK g_w è quoziente di funzione analitiche e $w - z \neq 0$.

Per $z=w$. f olomorfa $\Rightarrow$ f analitica, quindi per valori di z vicini a w, abbiamo

$$f(z) = f(w) + f'(w)(z-w) + \sum_{n\geq 2} a_n (z-w)^n$$

$$\Rightarrow \frac{f(z)-f(w)}{z-w} = f'(w) + \sum_{n\geq 2} a_n (z-w)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{f(w)-f(z)}{w-z}}_{= \boxed{g_w(z)}} = \underbrace{f'(w)}_{= g_w(w)} + \sum_{n\geq 2} a_n (z-w)^{n-1}$$

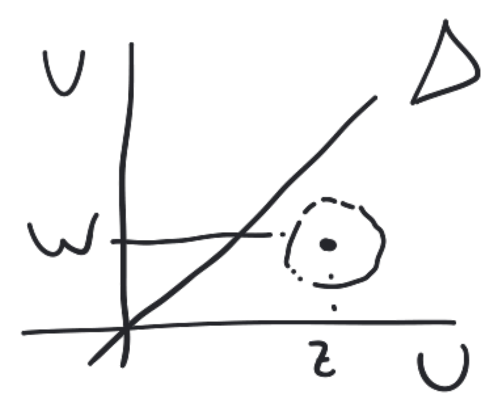
Se $|z-w| \ll 1$, (anche se $z=w$)

$$g_w(z) = f'(w) + \sum_{n\geq 2} a_n (z-w)^{n-1}$$

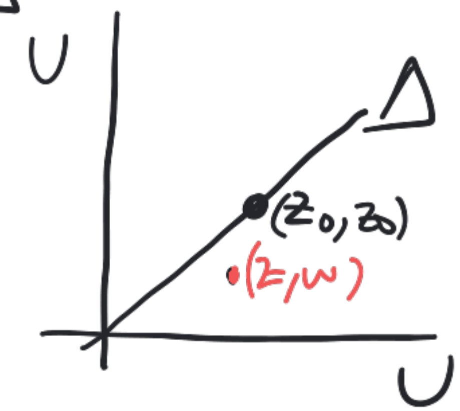
$\Rightarrow g_w$ è analitica in w

b) g è continua su $U \times U$

Di nuovo, per (z,w) fuori della diagonale g è continua: basta considerare un intorno di (z,w) che non tocca la diagonale Δ, dove g è chiaramente continua.



Sia adesso $(z_0, z_0) \in U \times U$, punto della diagonale Δ



Dobbiamo mostrare che

$$\lim_{(z,w)\to(z_0,z_0)} g(z,w) = g(z_0,z_0) = f'(z_0)$$

- Questo è ovvio se consideriamo punti $(z,z) \in \Delta$ vicini a (z_0,z_0).
- Sia adesso $(z,w) \notin \Delta$ (ossia, con $z \neq w$) vicino a (z_0,z_0)

Allora si ha che

$$g(z,w) - g(z_0,z_0) = \frac{f(w)-f(z)}{w-z} - f'(z_0) = \frac{\big(f(w)-f(z)\big) - f'(z_0)(w-z)}{w-z}$$

$$= \frac{1}{w-z}\int_z^w \big(f'(\xi) - f'(z_0)\big)\, d\xi,$$ dove l'integrale si può fare lungo qualunque curva in U tra z e w (essendo z e w vicini, perché (z,w) vicino a Δ, z e w si possono prendere nella stessa cpt connessa di $U \setminus \gamma$ ad esempio), ad esempio lungo il segmento $\overline{zw}$.

Ma allora abbiamo che

$$\left| g(z,w) - g(z_0,z_0) \right| \leq \cancel{\frac{1}{|w-z|} L(\overline{zw})} \sup_{\xi \in \overline{zw}} \left| f'(\xi) - f'(z_0) \right|$$

Ma, essendo f' continua (perché f olomorfa $\Rightarrow f$ analitica),

$$\left| f'(\xi) - f'(z_0) \right| \xrightarrow[(z,w)\to(z_0,z_0)]{} 0$$

(2) Sia V l'aperto che è unione delle componenti connesse di $\mathbb{C} \setminus \gamma$ con indice $=0$.

Siccome γ è omologo a 0 in U, $\mathbb{C} \setminus \gamma = U \cup V$.

Essendo inoltre $\gamma \subseteq U$, $\mathbb{C} = U \cup V$.

<u>Esempio</u>

Definiamo $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$z \longmapsto h(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z,w)\, dw, & \text{se } z \in U \\ \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw, & \text{se } z \in V \end{cases}$$

h è ben definita:

$z \in U \cap V$ $(\Rightarrow z \notin \gamma)$. Allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z,w)\, dw \underset{\substack{z \neq w \\ \text{perché } z \notin \gamma}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w) - f(z)}{w-z}\, dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \cancel{\frac{f(z)}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w-z}\, dw}$$

0 perché γ omologa a 0 e $w(\gamma, z) = 0$, $\forall z \in V$.

Mostriamo adesso che $\left| \begin{array}{l} h \text{ è intera (i.e. analitica in } \mathbb{C}) \\ h \text{ è limitata} \end{array} \right) \underset{\text{Liouville}}{\Longrightarrow} h$ costante

- h analitica ($\Leftarrow$ h olomorfa)

- h olomorfa in V: perché $\gamma \cap V \neq \emptyset$
- h olomorfa in U:

  a) h è continua (g è uniformemente continua nel compatto γ)

  b) basta mostrare che $\forall$ rettangolo $R \subseteq U$,

$$\int_{\partial R} h(z)\, dz = 0.$$

Ma

$$\int_{\partial R} h(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \left[\int_{\gamma} g(z,w)\, dw \right] dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \underbrace{\int_{\partial R} g(z,w)\, dz}_{=0} \, dw$$

$=0$ perché $z \mapsto g(z,w)$ è olomorfa $\forall w$

Abbiamo quindi che h è intera.

Vediamo che h è limitata: basta mostrare che $\lim_{|z|\to\infty} |h(z)| = 0$

Ma $$|h(z)| = \frac{1}{2\pi i}\left|\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw\right| \leq \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\frac{\sup_\gamma |f(w)|}{\operatorname{dist}(z,\gamma)}}_{\to 0} L(\gamma)$$

Quindi, per il teorema di Liouville,

$$h \equiv 0.$$

Otteniamo quindi che, $\forall z \in U \setminus \gamma$,

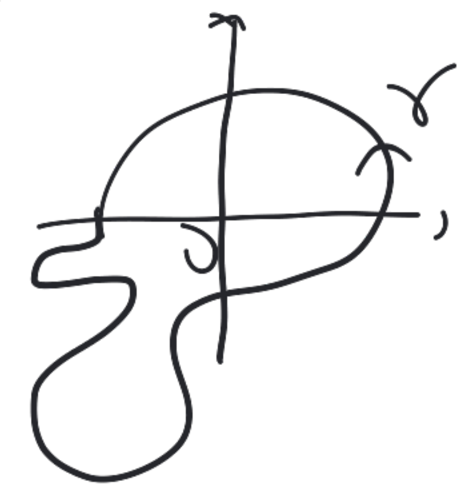
$$0 = h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \underbrace{\frac{f(z)}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,dw}_{= w(\gamma, z)}$$

■

<u>Esempio</u> Sia γ una curva chiusa

con $w(\gamma, 0) = 1$ e $0 \notin \gamma$.



Consideriamo $f(z) = \frac{e^z}{z}$.

Allora $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z}\, dz = w(\gamma, 0)\, 2\pi i\, e^0$

$= 2\pi i$