La formula integrale di Cauchy

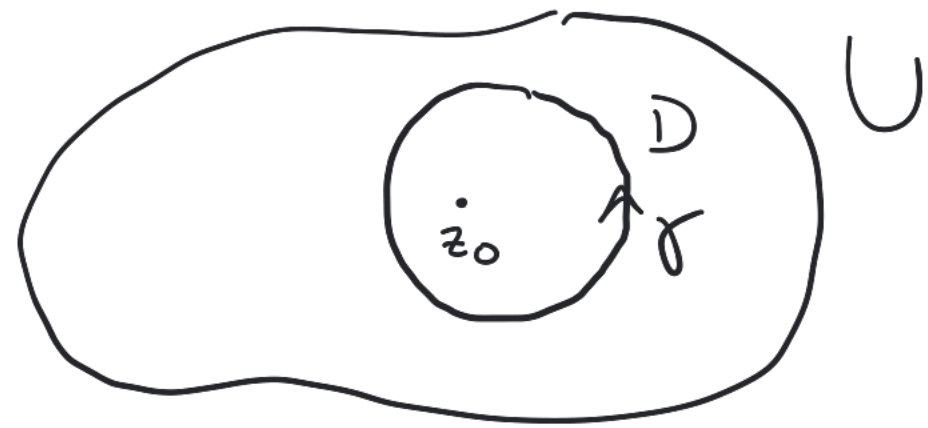
Teorema [Formula integrale o locale di Cauchy]

Sia $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa e sia D un disco t.c. $\overline{D} \subset U$.

Sia $\gamma = \partial \overline{D}$ il bordo di D percorso in senso antiorario.

Allora, per ogni $z_0 \in D$ si ha:

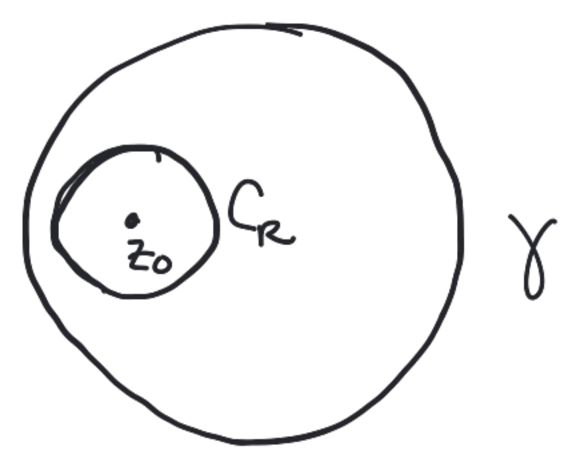
$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz}$$



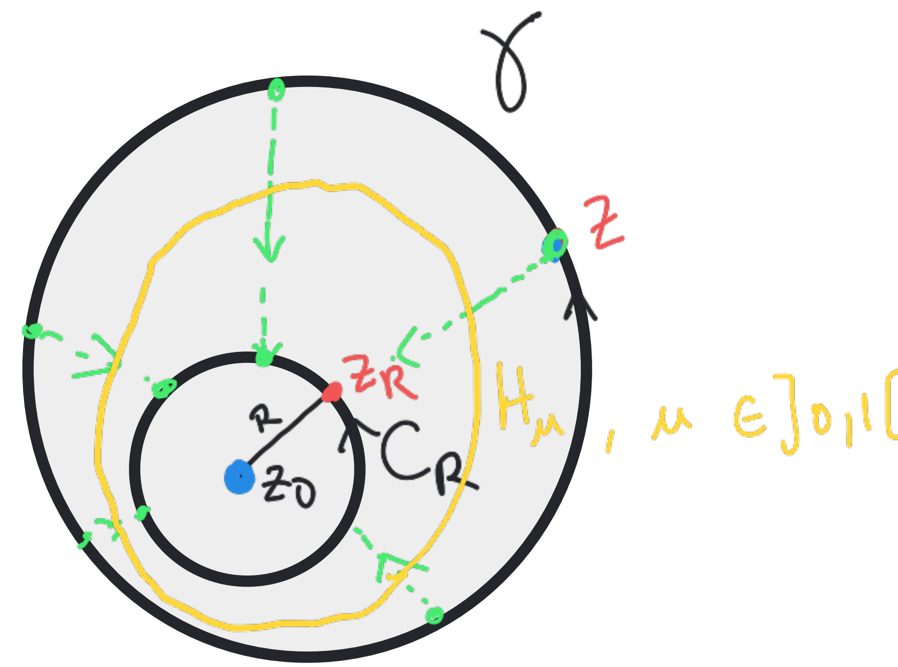
dim Sia C_R la circonferenza di raggio R e centro z_0, con $R \ll 1$, così che $C_R \subset D$.

Allora $C_R \sim \gamma$.

Infatti sono entrambi contenuti in $\overline{D}$, che è semp. connesso.



(I) Mostriamo direttamente che $\underbrace{\gamma \sim C_R}$ in $\underbrace{U_0 = U \setminus \{z_0\}}$



Sia $\underbrace{z_R} = z_0 + R \dfrac{z - z_0}{|z - z_0|}$

$$\left.\begin{array}{l} z = \gamma(t) \\ t \in [0, 2\pi] \end{array}\right\} = z_0 + R \frac{\gamma(t) - z_0}{|\gamma(t) - z_0|} =: \gamma(t)_R$$

Allora
$$\begin{cases} H : [0, 2\pi] \times [0,1] \longrightarrow U_0 \\ \quad (t, u) \longmapsto u\, \gamma(t)_R + (1-u)\, \gamma(t) \end{cases}$$
è omotopia da $\gamma(t)$ a C_R in $U_0 = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

(II) Sia $g(z) = \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$, $z \in D$ e $z \neq z_0$

Allora g è olomorfa in U_0 $\underset{\uparrow}{\Longrightarrow}$ $\displaystyle\int_\gamma g(z)\, dz = \int_{C_R} g(z)\, dz$

Forma omotopica del T. di Cauchy in U_0

Siccome f è olomorfa in z_0,

$$\exists \lim_{z \to z_0} \underbrace{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}_{g(z)} = f'(z_0) = \underbrace{\lim_{z\to z_0} g(z)}$$

$\Rightarrow$ g è limitata in un intorno di z_0.

$$\underset{R \ll 1}{\Rightarrow} \left| \int_{C_R} g(z)\, dz \right| \leq \sup_{C_R} |g| \cdot L(C_R)$$

$$\Rightarrow \int_{C_R} g(z)\, dz = 0$$

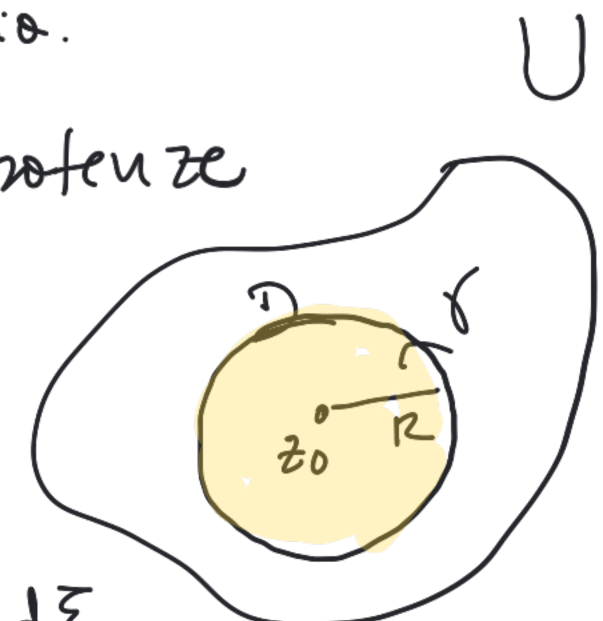
Ma allora $0 = \int_\gamma g(z)\, dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz - f(z_0) \underbrace{\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\, dz}_{= 2\pi i}$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = f(z_0)\, 2\pi i. \quad \blacksquare$$

[Formula di Cauchy per lo sviluppo in serie]

Teorema Sia f olomorfa in un aperto U contenente un disco chiuso $\overline{D} = \overline{D}(z_0, R)$, $R > 0$, e sia γ la frontiera di $\overline{D}$ percorsa in senso antiorario.

Allora f ha un' espansione in serie di potenze



$$(\otimes) \quad \boxed{f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n}$$

con

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi$$

In più, $|a_n| \leq \dfrac{\|f\|_\gamma}{R^n}$ (disuguaglianze di Cauchy)

e in particolare il raggio di convergenza della serie é $\geq R$.

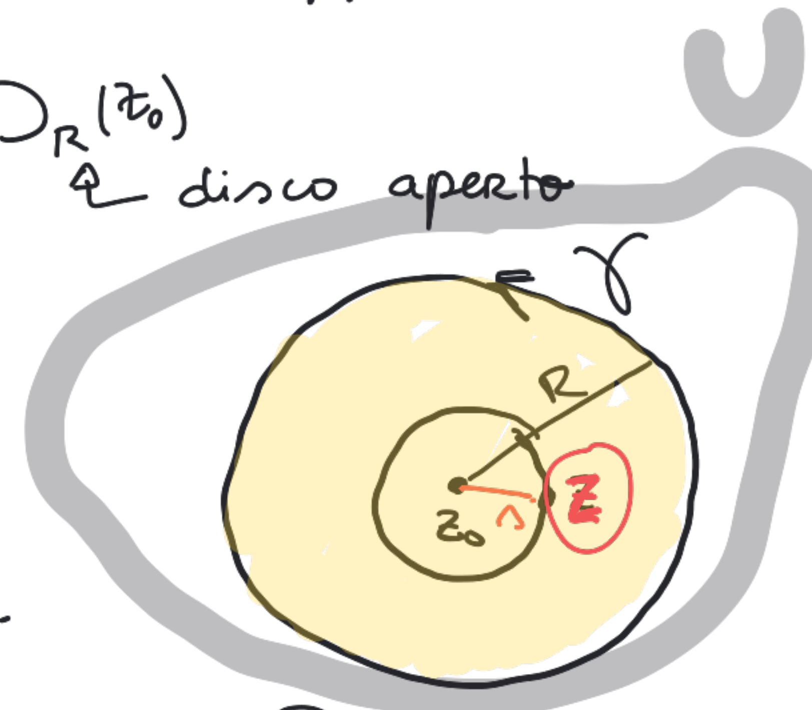
Corollari

1) Sia f olomorfa in $U \Rightarrow f$ è analitica in U.

2) Sia $\sum a_n z^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R>0$. Allora la funzione analitica associata $f(z) = \sum a_n z^n$ su $D_R(0)$ non può essere olomorfa su un disco di raggio $R' > R$.

<u>dim</u> (del teorema - Formula int. di Cauchy per lo sviluppo in serie]

(I) Per la formula int. di Cauchy, $\forall\, z \in D_R(z_0)$ ← disco aperto



$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi}$$

Sia ρ: $0 < \rho < R$ e consideriamo $D_\rho(z_0)$.

Vedremo che f ammette uno sviluppo in serie in $D_\rho(z_0)$.

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0}\left(\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\xi - z_0}\left(1 + \frac{z - z_0}{\xi - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^2 + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^3 + \dots\right)$$

Sia $\xi \in \underbrace{\partial D_R(z_0)}^{=\gamma}$ e $|z-z_0| \leq \rho$, allora

$$\left|\frac{z-z_0}{\xi - z_0}\right| \leq \frac{\rho}{R} < 1$$, quindi la serie geometrica precedente converge uniformemente.

Inoltre f è olomorfa, quindi f è limitata su γ.

Abbiamo quindi

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\xi - z_0}\right)^n,$$ con convergenza uniforme su $D_\rho(z_0)$.

Per il teorema di integrazione di serie uniformemente convergenti, $\forall z \in D_\rho(z_0)$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\xi - z_0}\right)^n d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{conv.} \\ \text{uniforme}}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(z-z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} f(\xi) \, d\xi$$

$$= \sum_{n\geq 0} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi}_{= a_n} (z-z_0)^n$$

II Stima su $|a_n|$

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{\xi \in \gamma} \frac{|f(\xi)|}{|(\xi - z_0)^{n+1}|} \cdot \overbrace{L(\gamma)}^{2\pi R}$$

$$= \frac{\sup_{\xi \in \gamma} |f(\xi)|}{R^{n+1}} \cdot R = \sup_{\xi \in \gamma} \frac{|f(\xi)|}{R^n}$$

III $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \dfrac{\limsup \sqrt[n]{\sup_{\xi \in \gamma} |f(\xi)|}}{R} = \dfrac{1}{R}$

$\Rightarrow$ Il raggio di convergenza di

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{e'} \geq R$$

Quindi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ definisce una funzione analitica,

e quindi olomorfa su $D_R(z_0)$ che coincide con

f su $D_r(z_0)$.

$$\underset{\substack{\text{teorema} \\ \text{sull'unicità dello sviluppo}}}{\Longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = f(z) \text{ su } D_R(z_0).$$

$\blacksquare$

Esempio $f(z) = \dfrac{e^z}{z-1}$ è analitica in $\mathbb{C} \setminus \{1\}$

Allora:

- Il raggio di conv. dello sviluppo di f in $z=0$ è $R=1$
- " " " " " " $z=2$ è $R=1$.
- " " " " " " $z=4$ è $R=3$.

Def Una funzione $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ si dice intera se è olomorfa in $\mathbb{C}$.

Oss. Una funzione intera ha uno sviluppo

$$\underbrace{f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n}$$ con raggio di convergenza $R = \infty$.

Corollario 1) Sia f una funzione intera e supp. che esiste una costante C e un intero $K \geq 0$: $\forall R >> 0$

$$\| f \|_{C_R} = \sup_{z \in C_R} |f(z)| \leq C R^K,$$

dove $C_R = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = R \}$.

Allora f è un polinomio di grado $\leq K$.

oss vale anche il vice-versa.

Corollario 2 [Liouville]

f intera e limitata $\Longrightarrow$ f costante.

dim (corollario 1)

Teorema precedente: $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ su $D_R(0)$,

con $|a_n| \leq \dfrac{\sup_{z\in C_R} |f(z)|}{R^n} \underset{\text{ipotesi}}{\leq} \dfrac{C \cdot R^k}{R^n}$

Se $n > k$, allora $|a_n| \leq \dfrac{CR^k}{R^n} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \Rightarrow a_n = 0$

Quindi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{k} a_n z^n \text{ su } \mathbb{C}. \quad \blacksquare$$

Applicazioni: Teorema Fondamentale dell'Algebra.

Sia $p(z) = a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ pol. di grado $d \geq 0$.

Se $p(z)$ non ha radici su $\mathbb{C}$ allora

$\frac{1}{p(z)}$ è una funzione intera e limitata

Infatti, $\lim_{|z| \to \infty} |p(z)| = \begin{cases} +\infty & \text{se } d \geq 1 \\ |a_0| & \text{se } d = 0 \end{cases}$

Liouville $\Rightarrow \frac{1}{p}$ è costante $\Rightarrow p$ è costante. ∎

Esempi • e^z è intera ed è evidentemente non limitata.

• $\cos z$, $\sin z$ sono non limitate in $\mathbb{C}$! ⇝ esercizio

Corollario Una funzione intera e non costante ha immagine densa in $\mathbb{C}$.

dim Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ intera e supp. che l'immagine di f non sia densa. Allora $\exists\ \alpha \in \mathbb{C}$ e $r > 0$ t.c.

$$|f(z) - \alpha| > r, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

$$\Rightarrow \quad g(z) = \frac{1}{f(z) - \alpha} \quad \text{è intera e soddisfa}$$

$$|g(z)| < \frac{1}{r}, \ \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow g \text{ è limitata}$$

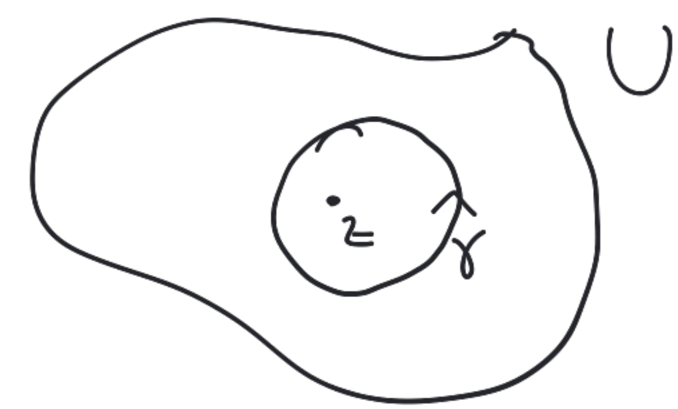
T. Liouville

$\Rightarrow$ g è costante $\Rightarrow$ f è costante. ∎

OSS. T. Picard assicura che una funzione intera non costante ha come immagine $\mathbb{C}$ oppure $\mathbb{C} \setminus \{\text{punto}\}$, ma la dim è difficile.

Corollario 3 [Formula integrale per le derivate]

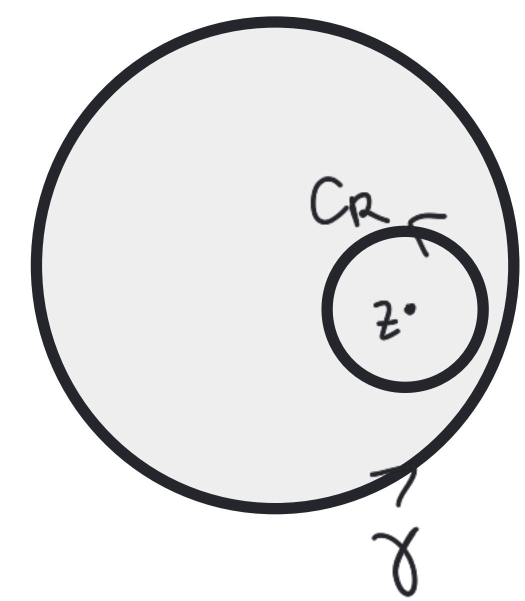
Sia $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa e sia D un disco t.c. $\overline{D} \subseteq U$ e sia γ il bordo di $\overline{D}$.



Allora, $\forall z \in D$,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw$$

dim. Sia $R \ll 1$. Allora $C_R \sim \gamma$ in $U \setminus \{z\}$



$$\Rightarrow f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\, n! \int_{C_R} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw$$

formule di Cauchy per lo sviluppo in serie

$$= \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw$$

inv. omotopica

Teorema [Morera] Sia U un'aperto e f continua in U. Assumiamo che l'integrale di f lungo il bordo di qualsiasi rettangolo contenuto in U è 0. Allora f è analitica $\Updownarrow$ olomorfa.

dim Come conseguenza del T. di Goursat, abbiamo visto che una tale funzione ammette una primitiva g.

Allora g è una funzione olomorfa, e quindi analitica,

t.c. $g' = f$.

Otteniamo quindi che anche f è analitica / olomorfa ∎