Funzione analitiche (seguendo Lang II. § 4).

Def. Sia f una funzione definita in un intorno di $z_0 \in \mathbb{C}$.
Diciamo che f è analitica in z_0 se esiste una serie di potenze

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n},$$

assolutamente convergente per $f(z)$, se z è t.c.

$|z-z_0| < R$, con $R>0$.

→ ossia, f è analitica in z_0 se in un intorno di z_0 è la somma di una serie di potenze intorno a z_0 convergente.

$$\to \exists\, R>0: \boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n}, \quad |z-z_0| < R.$$

- Se $U \subset \mathbb{C}$ è un aperto e $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$, diciamo che f è analitica in U se è analitica in z_0, $\forall z_0 \in U$.

- Se $S \subset \mathbb{C}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{C}$ non necessariamente aperto, diciamo che $f: S \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ è analitica in S se è analitica in un aperto di $\mathbb{C}$ che contiene S.

<u>Oss.</u> Il teorema 3.2 implica che se f ammette uno sviluppo in serie di potenze, allora è unico.

→ Infatti, sviluppo intorno a $z=0$ o intorno a $z_0 \neq 0$ non cambia niente:

Dato $\underline{g(z)} := \underline{f(z - z_0)}$, abbiamo che

un sviluppo di g in potenze di z

$\Updownarrow$

un sviluppo di f in potenze di $z - z_0$

Quindi l'unicità per $g \Rightarrow$ unicità per f.

<u>Prop.</u> Sia $U \subset \mathbb{C}$ aperto e f, g analitiche in U, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Allora i) • $f+g$, fg e αf sono analitiche in U

• $\frac{f}{g}$ è analitica in ogni aperto contenuto nel sottoinsieme degli $z \in U$ t.c. $g(z) \neq 0$.

ii) Se $V \subset \mathbb{C}$ è un aperto e $h: V \to U$ e $f: U \to \mathbb{C}$ sono analitiche, allora $f \circ h$ è analitica in V.

<u>dim</u> i) segue dalle proprietà sulla convergenza di serie per quanto riguarda somme, prodotti, etc. (Th. 3.1 e Thm 3.3)

$f \circ h \to$ è anal. in z_0?

ii) Sia $z_0 \in V$ e $h(z_0) = w_0 \in U$.

Allora $h(z) = w_0 + \sum_{k \geq 1} b_k (z-z_0)^k$ in un intorno di z_0.

$\Rightarrow h(z) - w_0 = \sum_{k \geq 1} b_k (z-z_0)^k$ in un intorno di z_0

dim i) segue dalle proprietà sulla convergenza di serie per quanto riguarda somme, prodotti, etc. (Th. 3.1 e Thm 3.3)

$f \circ h \to$ è anal. in z_0?

ii) Sia $z_0 \in V$ e $h(z_0) = w_0 \in U$.

Allora $h(z) = w_0 + \sum_{k \geq 1} b_k (z-z_0)^k$ in un intorno di z_0.

$$\Rightarrow h(z) - w_0 = \underbrace{\sum_{k\geq 1} b_k (z-z_0)^k}_{\text{serie di potenze di ordine} \geq 1}$$ in un intorno di z_0

Sia $f(w) := \sum_{n\geq 0} a_n (w-w_0)^n$ in un intorno di w_0.

Allora, alla luce del teorema 3.4, possiamo sostituire $w-w_0$ per $h(z)-w_0$, poiché questa non ha termine di ordine costante.

Ottieniamo quindi che possiamo formare la serie composta $f \circ h$ e $\boxed{f(h(z)) = \sum_{n\geq 0} a_n \left(\sum_{k\geq 1} b_k (z-z_0)^k \right)^n}$ è uno sviluppo in serie di $f \circ h$ in un intorno di z_0. ▩

Esempi 1) Sono analitiche in $\mathbb{C}$:

- Polinomi
- La funzione esponenziale: dato $z_0 \in \mathbb{C}$;

$$e^{z} = e^{z-z_0+z_0} = e^{z_0}\cdot e^{z-z_0} = \boxed{e^{z_0}\sum_{n\geq 0}\frac{(z-z_0)^n}{n!},\ \forall z\in\mathbb{C}}$$

- Le funzioni trigonometriche

$$\boxed{\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}} \quad \text{e} \quad \boxed{\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}}$$

Esercizio.

2) Le funzioni razionali $\frac{P(z)}{Q(z)}$, con $P, Q \in \cancel{\mathbb{C}[z]}$ polinomi

è ben definita in tutti i punti di $z \in \mathbb{C}$: $Q(z) \neq 0$.

Teorema (4.1 di Lang).

Sia $\boxed{f(z)=\sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n}$ una serie di potenze con raggio di convergenza R, i.e., tale che f converge assolutamente per z: $|z-a|<R$. Allora f e' analitica nel disco aperto $\boxed{D(a,R)}$.

i.e., f e' analitica in z_0, $\forall z_0 \in D(a,R)$.

dim. Possiamo, a meno di fare un cambiamento di variabile, supporre che $a=0$, e quindi che

$$\boxed{f(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n},$$

~~con~~ raggio di conv. R.

Dobbiamo mostrare che f ammette uno sviluppo in serie di potenze in qualsiasi punto $z_0 \in D(0,R)$.

Sia quindi $z_0 \in D(0,R)$,

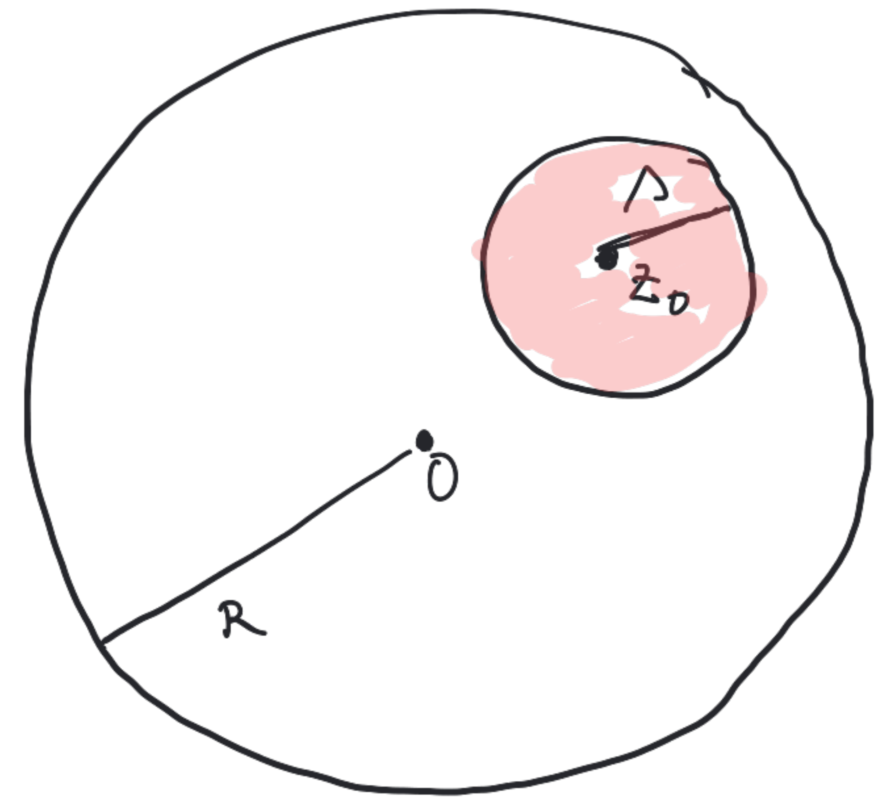
quindi $|z_0| < R$.

Sia quindi $z_0 \in D(0,R)$,

quindi $|z_0| < R$.

Sia $s>0$ t.c.

$$\boxed{|z_0| + s < R.}$$



Vedremo che f può rappresentarsi per una serie di potenze in z_0 convergendo assolutamente $\forall z: |z-z_0|<s$.

Scriviamo $\boxed{z = z_0 + (z-z_0)}$, quindi

$$z^n = (z_0+(z-z_0))^n$$

$$\Longrightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (z_0+(z-z_0))^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_0^k (z-z_0)^{n-k} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_0^{k} (z-z_0)^{n-k} \right)$$

$$\stackrel{?}{=} \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{n \geq k} a_n \binom{n}{k} z_0^{n-k} \right] (z-z_0)^{k}} \quad \otimes$$

$\rightarrow$ E' possibile scambiare l'ordine perche' se $|z-z_0| < r$, Allora $|z_0| + |z-z_0| < R$, e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left(|z_0| + |z-z_0| \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |z_0|^{n-k} |z-z_0|^{k} \right]$$

e' convergente.

$\Rightarrow$ La serie $\otimes$ e' convergente e dà lo sviluppo desiderato in z_0, valido in $D(z_0, r)$. $\blacksquare$

Esempio

Sia $\boxed{f(z) = \frac{z^2}{z+2}}$. Allora f è analitica in $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$.

$\Rightarrow$ Trovare i primi termini dello sviluppo di f in potenze di $z-1$ (i.e., intorno a $z_0 = 1$).

Scrivendo $z = 1+(z-1)$ e $z+2 = 3+(z-1)$,

otteniamo

$$\frac{z^2}{z+2} = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{5}{3}(z-1) + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}\right)(z-1)^2 + \left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}-\frac{1}{3^2}\right)(z-1)^3 + \text{termini di ordine superiore}\right].$$