Funzione olomorfe su insiemi connessi

• Curve e archi

Def Una curva differenziabile (o solo curva) e' un' applicazione

$$\gamma : \underset{\subset \mathbb{R}}{[a,b]} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto \gamma(t)$$

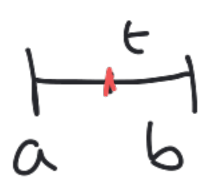
di classe C^1, i.e., se

$$\boxed{\gamma(t) = \underbrace{\gamma_1(t)}_{Re(\gamma(t))} + i\, \underbrace{\gamma_2(t)}_{= Im(\gamma(t))}},$$

le funzioni

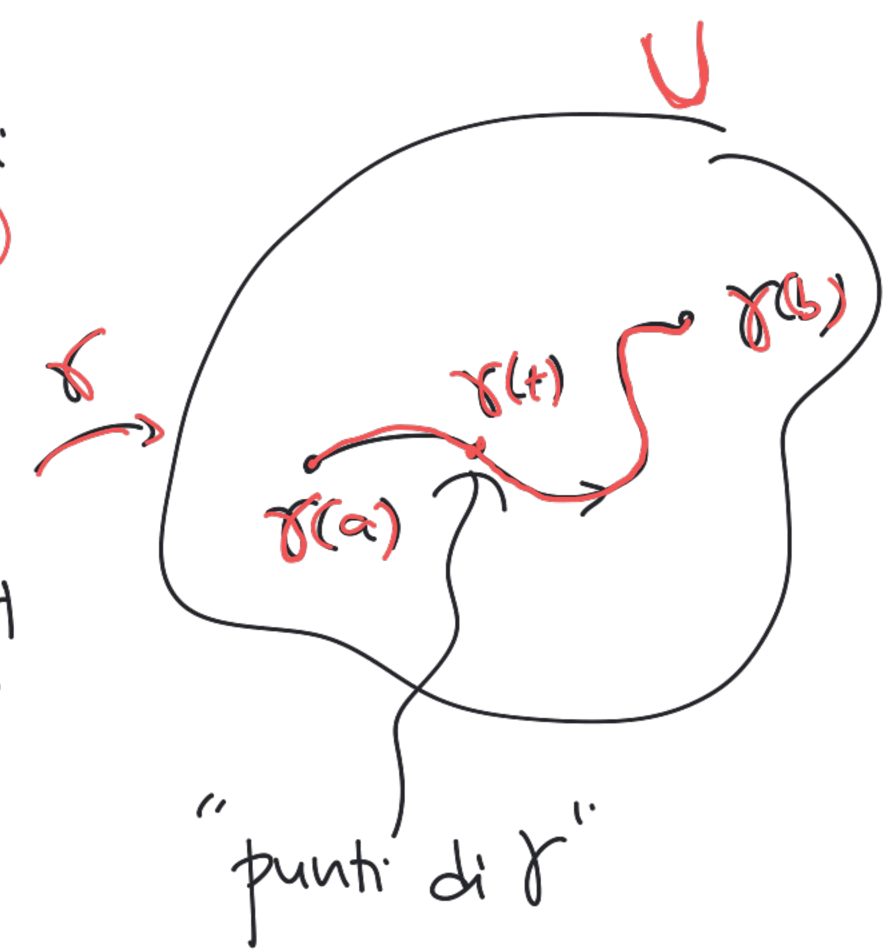
$$\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

siano di classe C^1



estremi di γ:
- $\gamma(a)$: punto iniziale
- $\gamma(b)$: punto finale

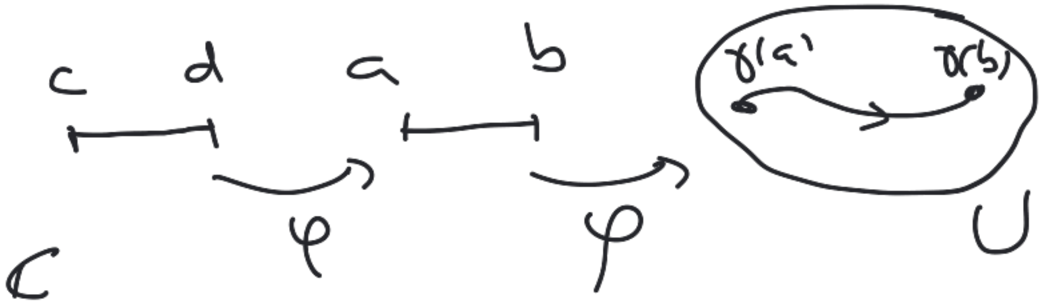
$\rightsquigarrow \gamma$ lega $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$



• γ e' chiusa se $\gamma(a) = \gamma(b)$

• Data $\varphi : [c, d] \longrightarrow [a,b]$ app. differenziabile t.c.

$$\begin{aligned} c &\longmapsto a \\ d &\longmapsto b \end{aligned} \quad , \quad \varphi'(t) > 0, \quad t \in [c,d],$$



la composizione

$$\gamma \circ \varphi : [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$$

si dice una riparametrizzazione di γ.

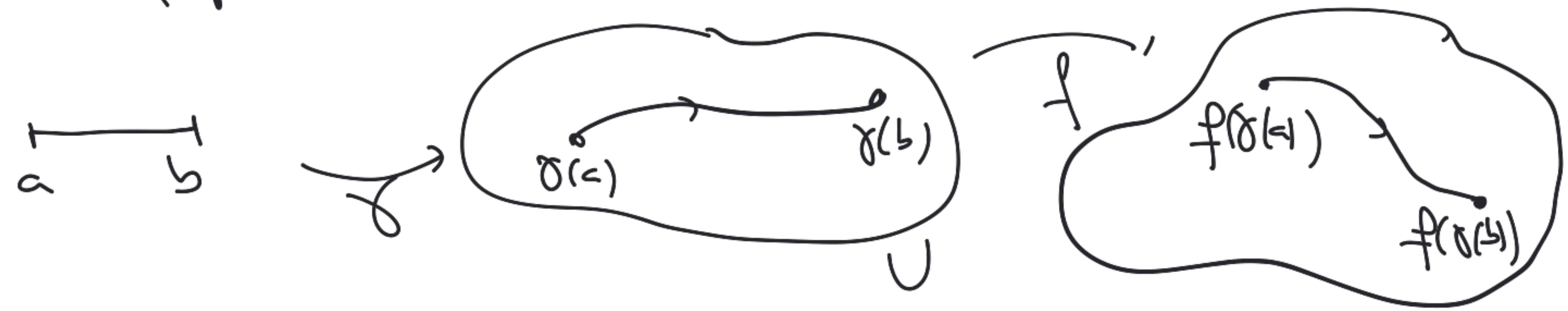
• Data una curva $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\,\gamma_2(t)$, la sua derivata $\gamma'(t)$ si definisce naturalmente

$$\boxed{\gamma'(t) = \gamma_1'(t) + i\,\gamma_2'(t)}$$

• Valgono le regole usuali per derivazione di somme, prodotti, quozienti, regola della catena, ...

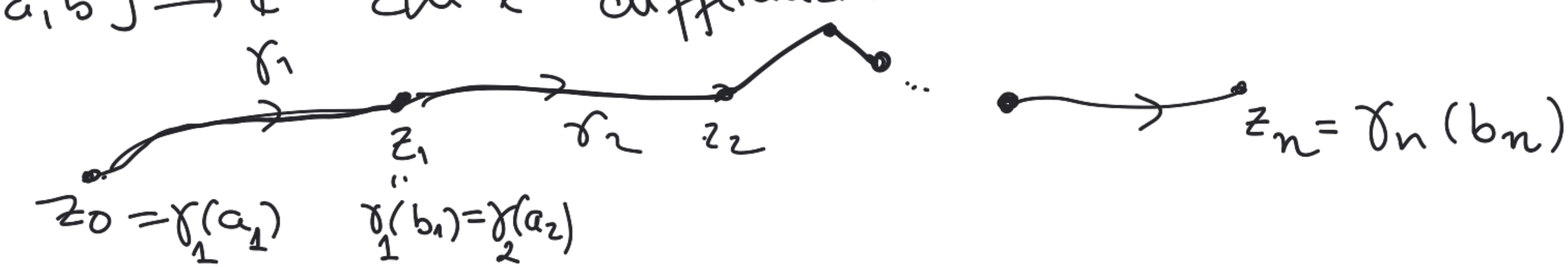
• Data una reparametrizzazione φ come sopra, $\gamma \circ \varphi$ è diff. e abbiamo $\boxed{(\gamma \circ \varphi)'(t) = \gamma'(\varphi(t))\,\varphi'(t)}$.

· Data $f: U \to \mathbb{C}$ funzione olomorfa e una curva $\gamma: [a,b] \to U$, allora $f \circ \gamma$ è una curva diff. e abbiamo $(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$, $t \in [a,b]$



⇝ <u>Generalizzazioni utili</u>

<u>Def</u> Un <u>cammino</u> (o arco) è una sucessione di curve $\gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ t.c. il punto finale di γ_i coincide con il punto iniziale di γ_{i+1}, ossia è una curva continua $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ che è differenziale a tratti.



Esempi

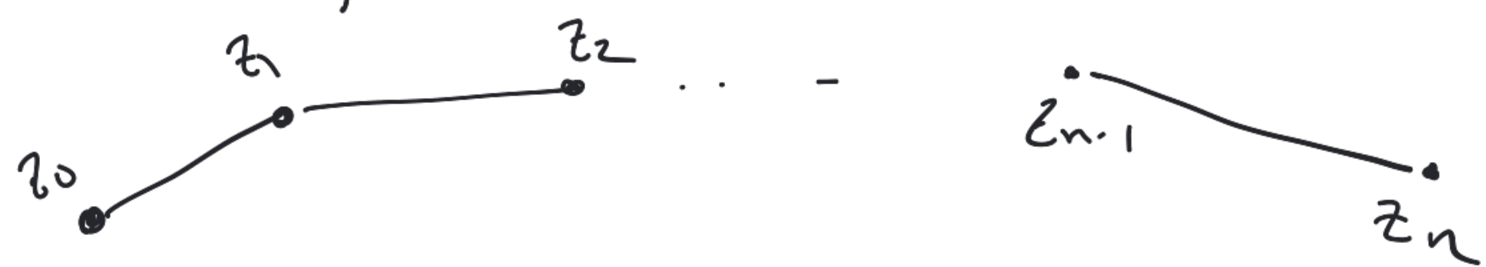
- Circonferenza di centro z_0 e raggio R è

$$C_R(z_0) : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\theta \longmapsto z_0 + Re^{i\theta}$$
$$= z_0 + R\cos\theta + iR\sin\theta$$

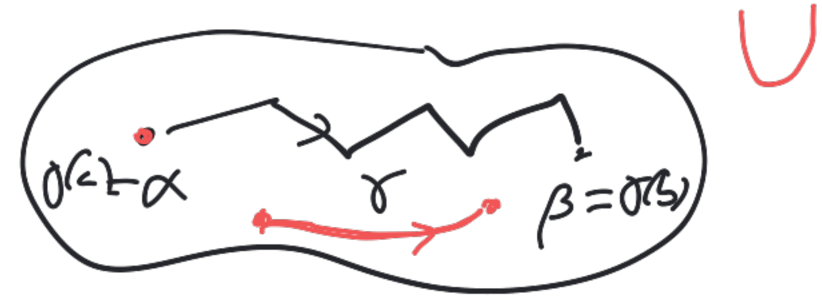
- Dati z_0, z_1 in $\mathbb{C}$, il segmento di estremi z_0 e z_1 è la curva

$$[z_0, z_1] : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto z_0 + t(z_1 - z_0)$$

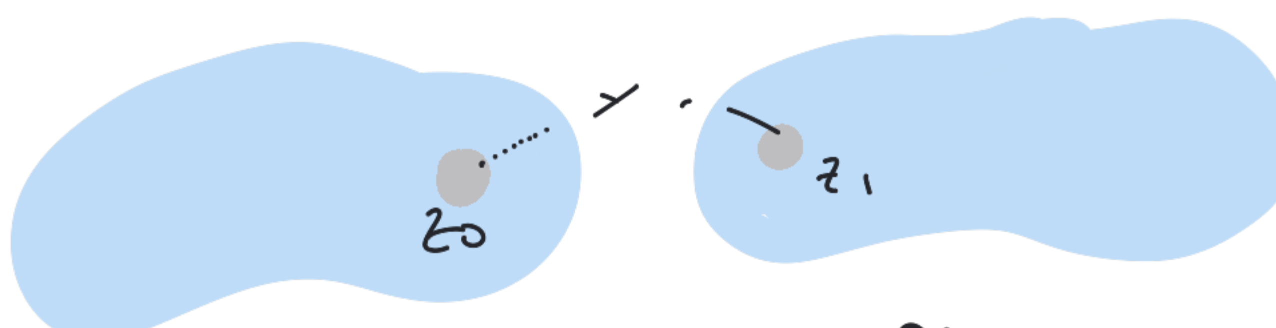
- Dati $z_0, \dots z_n$, la poligonale di vertici $z_0, \dots, z_n$ è il cammino $\{ [z_0, z_1], \dots, [z_{n-1}, z_n] \} =: [z_0, z_1, \dots z_n]$



Def. Dato $U \subset \mathbb{C}$, U è connesso per archi se dati due punti $\alpha, \beta \in U$, esiste un cammino $\gamma : [a, b] \longrightarrow U$ con $\gamma(a) = \alpha$, $\gamma(b) = \beta$.



Oss. Essendo U aperto di $\mathbb{C}$ localmente connesso per archi le nozioni di connesso e connesso per archi coincidono, quindi diremo più semplicemente connesso anziché connesso per archi. (vedere appendice alla fine della sezione 3.1 di Lang (pag 92).)



Sconnesso

Teorema Sia U un' aperto connesso e sia f olomorfa in U. Allora se $f' = 0$ in $U \Rightarrow f$ costante in U.

dim Siano $\alpha, \beta \in U$ due punti $\overset{?}{\Rightarrow} f(\alpha) = f(\beta)$

e sia $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$, supp γ diff. (γ e' una curva)

$$a \longmapsto \alpha$$
$$b \longmapsto \beta$$

Essendo γ differenziabile, $f \circ \gamma$ e' diff e

$$(f \circ \gamma)'(t) = \cancel{f'(\gamma(t))}^{\,0} \cdot \gamma'(t) \boxed{= 0} \qquad f \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$$

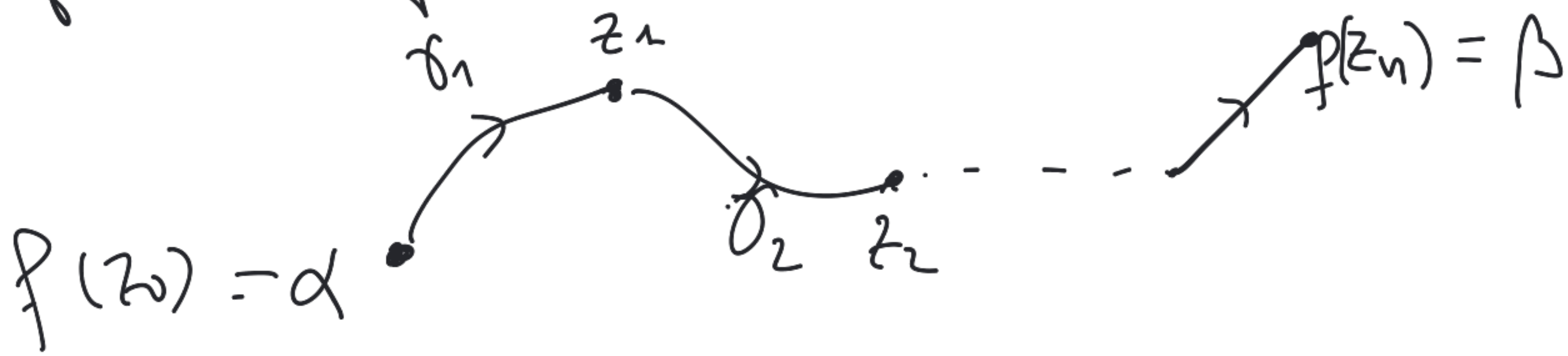
Quindi $f \circ \gamma$ e' una funzione da $[a,b]$ (int. reale connesso) con derivata nulla $\Rightarrow$ $f \circ \gamma$ e' costante

$$\Rightarrow f(\gamma(a)) = f(\gamma(b)) \Leftrightarrow \boxed{f(\alpha) = f(\beta)}$$

Caso generale: $\boxed{\gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}}$ è un cammino continuo legando α a β.

Allora se γ_i è un cammino tra z_{i-1} e z_i con $z_0 = \alpha$, $z_n = \beta$, abbiamo che

$$\alpha = f(z_0) = f(z_1) = \dots = f(z_{n-1}) = f(z_n) = \beta$$



∎

Oss. Se $g : U \to \mathbb{C}$ è una primitiva per f in U, g è ben determinata a meno di una costante.

Esempio: $\boxed{g(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1} + c}$ è primitiva di $\boxed{f(z) = z^n}$, $n \neq -1$ $(\forall c \in \mathbb{C})$.

Teorema [Zeri di una funzione analitica in un aperto connesso]

Sia $U \subset \mathbb{C}$ aperto connesso.

i) Se $f: U \to \mathbb{C}$ è analitica e non costante, allora l'insieme degli zeri di f in U è discreto.

ii) Siano f, g analitiche in U e sia $S \subset U$ un'insieme non discreto (i.e, $\exists\, s \in S$ che non è un punto isolato di S).
Assumiamo che $f(z) = g(z)$, $\forall z \in S$. Allora $f = g$ in U.

Ric. Dato un insieme S e $s \in S$, s è detto punto isolato di S se esiste un disco $D(s, R)$, con $R > 0$ t.c. $D(s, R) \cap S = \{s\}$.
S si dice discreto se tutti i suoi punti sono punti isolati.

Esempi:
- $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ è discreto
- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ non è discreto
- $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ è discreto ma $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ non è discreto (0 non è isolato).

<u>dim</u> i) $\Rightarrow$ ii) applicato a $f-g$

Invece i) segue dai seguenti due Lemmi:

<u>Lemma 1</u> Sia $f: U \to \mathbb{C}$ analitica in z_0 con $f(z_0)=0$. Allora o f è localmente costante in z_0 o z_0 è un zero isolato di f.
(i.e. f loc. nulla)

<u>Lemma 2</u> Sia $f: U \to \mathbb{C}$ analitica con $U \subset \mathbb{C}$ connesso. Se f è loc. costante in $z_0 \in U$, allora f è costante in U.

<u>dim</u> (teorema i)

Dato z_0 : $f(z_0)=0$, se z_0 non è un zero isolato, allora f è localmente nulla intorno a z_0 (Lemma 1)

$\underset{\text{Lemma 2}}{\Longrightarrow}$ f è costantemente nulla in U $\not{D}$.

<u>dim</u> (Lemma 1)

Segue dal Teorema 3.2 (i)

[Sia $f(z) = \sum_{n\geq 1} a_n z^n$ serie di potenze convergente e non costante, $f(0)=0$. Allora $\exists\, r>0 : \forall z\ 0<|z|<r$, $f(z)\neq 0$.

Infatti, se $f(0)=0$ e f non è loc. costante, essendo f analitica in 0, $f(z) = \sum_{n\geq 1} a_n z^n$ in un intorno di zero, con gli a_n non tutti nulli $\underset{3.2\ i)}{\Longrightarrow}$ $z=0$ è zero isolato di f. ∎

dim (Lemma 2)

Supp. che f sia loc. costante in $z_0 \in U$, i.e., esiste un' intorno aperto U_0 di z_0 contenuto in U dove f e' costante: $\boxed{f|_{U_0} \equiv c}$.

A meno di sostituire f con $f-c$, possiamo supporre che $c=0$. (i.e. f loc. nulla in z_0)

Sia $S := \{z \in U : f$ è loc nulla in $z\}$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{S \overset{?}{=} U}$

- $z_0 \in S \implies S \neq \emptyset$
- S e' aperto per definizione
- S è chiuso (in U):

$S \subset U$, $\neq \emptyset$, S chiuso e aperto in U $\implies S = U$ (↑ U connesso)

Sia $z \in \overline{S} \subset U$. Allora $\exists \{z_n\} \longrightarrow z$ con $\{z_n\} \in S$. ($f(z_n)=0$)

Per continuità di f, $\boxed{f(z)=0}$ e, in più, z non e' un zero isolato di f $\overset{\text{Lemma 1}}{\implies}$ f è loc. nulla in z $\implies z \in S$.

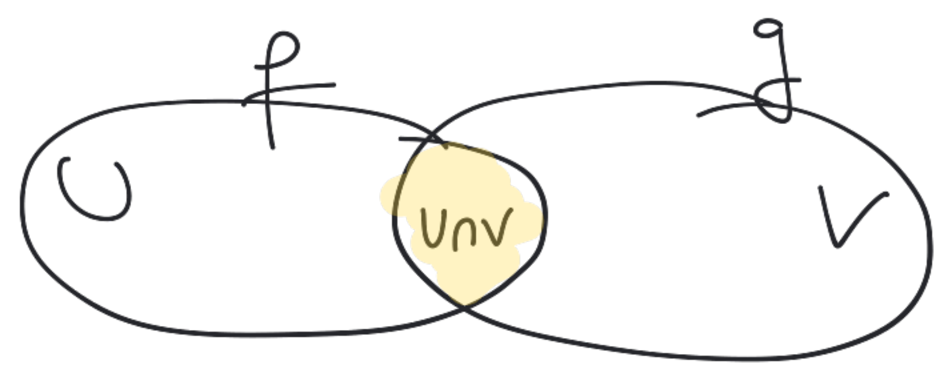
OSS. Mostreremo che f olomorfa $\Rightarrow$ f analitica.
A quel punto il risultato precedente si applica anche a funzioni olomorfe.

OSS. [Continuazione analitica di funzioni]

U, V connessi

Siano f e g analitiche in U e V, risp., e assumiamo che:

$$\begin{cases} \bullet\ U, V \text{ aperti e } U \cap V \neq \emptyset \\ \bullet\ f|_{U\cap V} = g|_{U\cap V} \end{cases}$$



V conness

Allora

$$F: U \cup V \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \begin{cases} f(z) & \text{se } z \in U \\ g(z) & \text{se } z \in V \end{cases}$$

è l'unica funzione analitica su $U \cup V$ t.c. $F|_U = f$. In questo caso g è detta la <u>continuazione analitica</u> di f a V.

Teorema [Principio del Massimo Modulo globale]

Sia $U \subset \mathbb{C}$ connesso aperto e sia $f: U \to \mathbb{C}$ analitica in U.

Se z_0 è un massimo per $|f|$, i.e.

$$|f(z_0)| \geq |f(z)| \quad , \forall z \in U,$$

allora f è costante in U.

dim Per ipotesi z_0 è un massimo locale per $|f(z)|$

$$\underset{\substack{\text{Princ. Massimo} \\ \text{Modulo Locale}}}{\Longrightarrow} \quad f \text{ loc. costante in } z_0 \underset{\substack{\text{Lemma 2} \\ (U \text{ connesso})}}{\Longrightarrow} f \text{ costante in } U. \quad \blacksquare$$

Corollario Sia U connesso e aperto e sia $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ analitica. Allora, se $|f|$ ha un massimo in $\overline{U}$, questo massimo viene raggiunto su $\partial(\overline{U})$ $(= \overline{U} \setminus U)$.

OSS In particolare, se U è anche limitato, $\overline{U}$ è compatto e abbiamo che questo massimo esiste sempre!