Proprietà geometriche delle funzioni analitiche

(Lang II, §6, The inverse and open mapping theorems) (1.9 Sernesi)

Def Sia f una funzione analitica in un'aperto $U \subset \mathbb{C}$ e sia $V := f(U)$. Diciamo che f è un **isomorfismo analitico** se
- V è aperto
- $\exists\ g : V \longrightarrow U$ analitica t.c. $\begin{cases} f \circ g = id_V \\ g \circ f = id_U \end{cases}$

(ossia, se f ammette un'inversa che è analitica).

· Diciamo che f è un **isomorfismo analitico locale** (o che è **localmente invertibile**) in un punto $z_0 \in U$ se esiste un'aperto $U_0 \ni z_0$ t.c. $f|_{U_0}$ è isomorfismo analitico in U_0.

OSS.. La parola "inversa" qui si utilizza per l'inversa per la composizione (da non confondere con inversa moltiplicativa).

OSS. • Isomorfismo analitico $\Rightarrow$ iso. analitico locale

• Un'isomorfismo analitico è un'applicazione aperta.

Teorema (6.1)

i) Sia $f(T) = a_1 T + a_2 T^2 + \dots$ serie di potenze di ordine 1.
Allora esiste una serie di potenze $g(T)$ t.c. $f(g(T)) = T$.
Questa serie soddisfa anche che $g(f(T)) = T$.

ii) Se f e' convergente, anche g e' convergente.

dim: i) L'avevamo dimostrato nell'esercizio 3 ii)

Lo rifacciamo per arrivare a una formulazione che è utile a dimostrare ii).

Sia $\boxed{f(T) = a_1 T - \sum_{n=2}^{\infty} a_n T^n; \quad a_1 \neq 0}$

Cerchiamo $g(T) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n T^n$, $b_1 \neq 0$, tale che

$$\boxed{f(g(T)) = T} \iff a_1\, g(T) - a_2 (g(T))^2 - a_3 (g(T))^3 - \dots = T$$

$$\iff \begin{cases} a_1 b_1 = 1 & \Longrightarrow \quad b_1 = \dfrac{1}{a_1} \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 & \Longrightarrow \quad b_2 = \dfrac{a_2 b_1}{a_1} \\ \dots \\ \boxed{a_1 b_n} - \boxed{P_n}(a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{n-1}) = 0, \end{cases}$$

dove P_n è un polinomio a coefficienti positivi.

Siccome $a_1 \neq 0$, è possibile risolvere ricursivamente le equazioni per determinare univocamente $b_1, b_2, \dots$

Quindi la serie $g(T)$ esiste ed è unica.

Dimostriamo che è vero anche che $g(f(T)) = T$.

Applicando a g lo stesso argomento, abbiamo che ord$(g) = 1$

$$\exists\ h(T) : g(h(T)) = T.$$

Ma allora $g(f(T)) = g(f(\overbrace{g(h(T))}^{T \,=})) = g(h(T)) = T.$

Assumiamo adesso che f è convergente

$\rightsquigarrow$ g è convergente?

$\to$ Ossia, $g(z) = \sum_{n\geq 1} b_n z^n$ è assolutamente convergente in un certo disco di raggio positivo?

$\to$ Senza perdita di generalità, assumiamo che $a_1 = 1$.

Consideriamo

$$f^*(T) = T - \sum_{n\geq 2} a_n^* T^n, \quad \begin{cases} a_n^* \text{ reali}, \ a_n^* \geq 0 \\ |a_n| \leq a_n^*, \ \forall n. \end{cases}$$

e sia

$$\boxed{\varphi(T) = \sum_{n\geq 1} c_n T^n}$$ l'inversa formale di f^*.

Allora abbiamo che

- $c_1 = 1$
- $c_n = P_n(a_2^*, \dots, a_n^*, c_1, \dots, c_{n-1})$, P_n polinomi di prima

Per induzione, segue che $c_n \in \mathbb{R}$, $c_n \geq 0$ e che

$$|b_n| \leq c_n$$

(perché i P_n sono polinomi a coeff. positivi e

$$|b_n| = |P_n(a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_{n-1})| \leq P_n(|a_1|, \dots, |a_n|, |c_1|, \dots, |c_{n-1}|)$$

$$\underset{|a_k| \leq a_k^*}{\leq} P_n(a_1^*, \dots, a_n^*, c_1, \dots, c_{n-1}) = c_n \;)$$

$\rightsquigarrow$ Dobbiamo quindi scegliere f^* in modo che $\varphi(z)$ sia convergente. $\Longrightarrow$ g è convergente

Siccome $f = \sum_{n \geq 1} a_n z^n$ è convergente,

$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$ esiste, e quindi

$\exists\, A > 0 \ : |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq A, \ \forall n$

e quindi $|a_n| \leq A^n, \ \forall n.$

Poniamo quindi

$$f^*(T) = T - \sum_{n \geq 2} A^n T^n = T - \frac{A^2 T^2}{1 - AT}$$

$\varphi(T)$ è t.c. $f^*(\varphi(T)) = T$

$$\iff \varphi(T) - \frac{A^2 (\varphi(T))^2}{1 - A\varphi(T)} = T$$

$$\Longleftrightarrow (A^2+A)(\varphi(T))^2-(1+AT)\varphi(T)+T=0$$

$$\Longleftrightarrow \varphi(T)=\frac{1+AT-(1+AT)\left(1-\frac{4T(A^2+A)}{(1+AT)^2}\right)^{1/2}}{2(A^2+A)}$$

Ma $$1-\frac{4T(A^2+A)}{(1+AT)^2}=1+h(T), \text{ con } h(T)$$

serie senza termine costante.

Quindi abbiamo visto che applicando $B^{1/2}$ possiamo trovare $(1+h(T))^{1/2}$, che è una serie convergente.

Siccome $\varphi(T)$ è ottenuta componendo serie convergenti, $\varphi(T)$ è convergente. $\blacksquare$

__Corollario__ [Teorema della funzione inversa].

Sia $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ analitica in $z_0 \in U$, U aperto.

Allora f è un isomorfismo locale in z_0 se e solo se $f'(z_0) \neq 0$.

__dim__ Se f è un isom. locale in z_0, allora esiste un'inversa locale per f in z_0.

Ma allora lo sviluppo di f in z_0,

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n (z - z_0)^n$$

deve essere tale che $a_1 \neq 0$

Ma $f'(z_0) = a_1$, quindi si conclude.

Mostriamo adesso che se $f'(z_0) \neq 0$, allora f e' un'isom. locale in z_0.

Cominciamo per supporre che $z_0 = 0$ e che $f(0) = 0$. $\iff a_0 = 0$

Quindi f è analitica in un intorno di 0, quindi esiste un disco aperto $D = D(0, r)$ t.c.

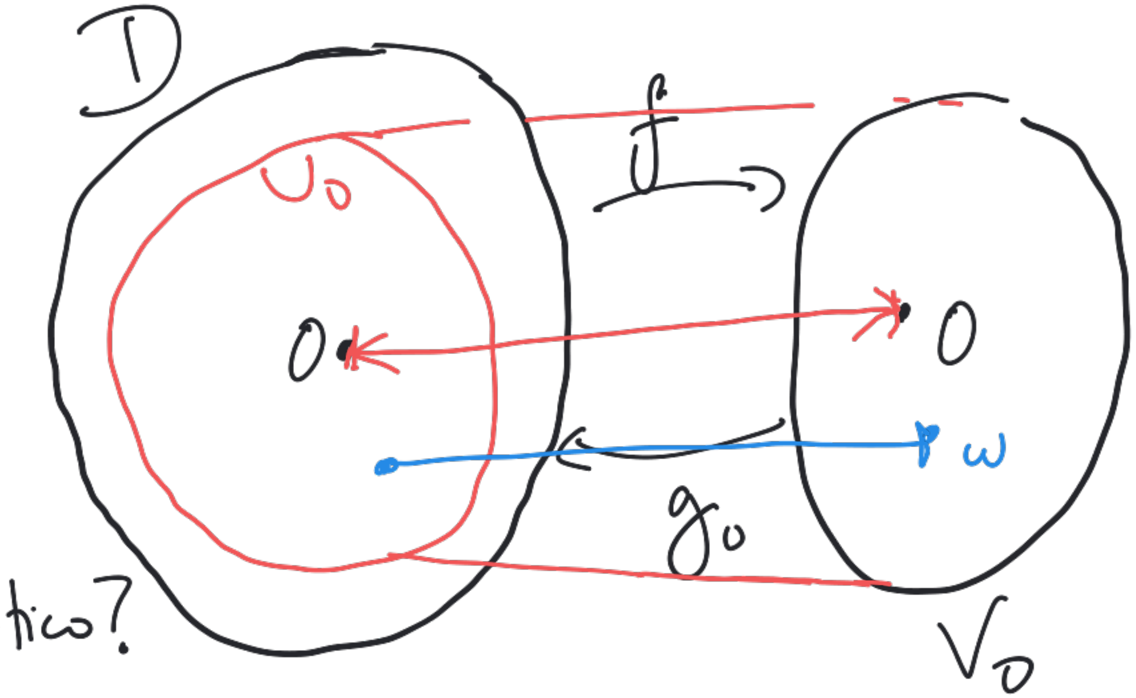
$$\underbrace{f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n z^n,}\quad \forall z \in D. \quad , a_1 \neq 0$$

$(a_1 = f'(0) \neq 0)$

Per il teorema precedente, esiste un'inversa formale g di f, che è una serie di potenze convergente in 0.

Sia V_0 un'aperto contenuto nella regione di conv. di g t.c. $g(V_0) \subset D$ (esiste poiché g e' continua)

Sia $U_0 := f^{-1}(V_0)$,



e sia

$$f|_{U_0} = \boxed{f_0 : U_0 \longrightarrow V_0}$$

è isomorfismo analitico?

- $g(V_0) \subset U_0$ perché $\forall w \in V_0$, $f(g(w)) = w \in V_0$

$$\rightsquigarrow \quad g|_{V_0} = g_0 : V_0 \longrightarrow U_0 \text{ è t.c.}$$

$$f_0(g_0(w)) = w, \quad \forall w \in U_0$$

e anche

$$g_0(f_0(z)) = z \quad , \forall z \in U_0$$

$\therefore$ f_0 e g_0 sono analitiche e inversa una dell'altra.

Caso generale: si conclude per traslazione.

Di preciso:

Se f è arbitraria e $z_0 \neq 0$,

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-z_0)^n .$$

$f(z) = F(z-z_0) + f(z_0)$

$\rightsquigarrow$ $w = z - z_0$ e $F(w) = f(w+z_0) - f(z_0) = \sum_{n\geq 1} a_n w^n$

Quindi F possiede un'inversa locale G.

Sia $w_0 = f(z_0)$ e $\boxed{g(w) = G(w-w_0) + z_0}$.

Allora g è un'inversa locale per f:

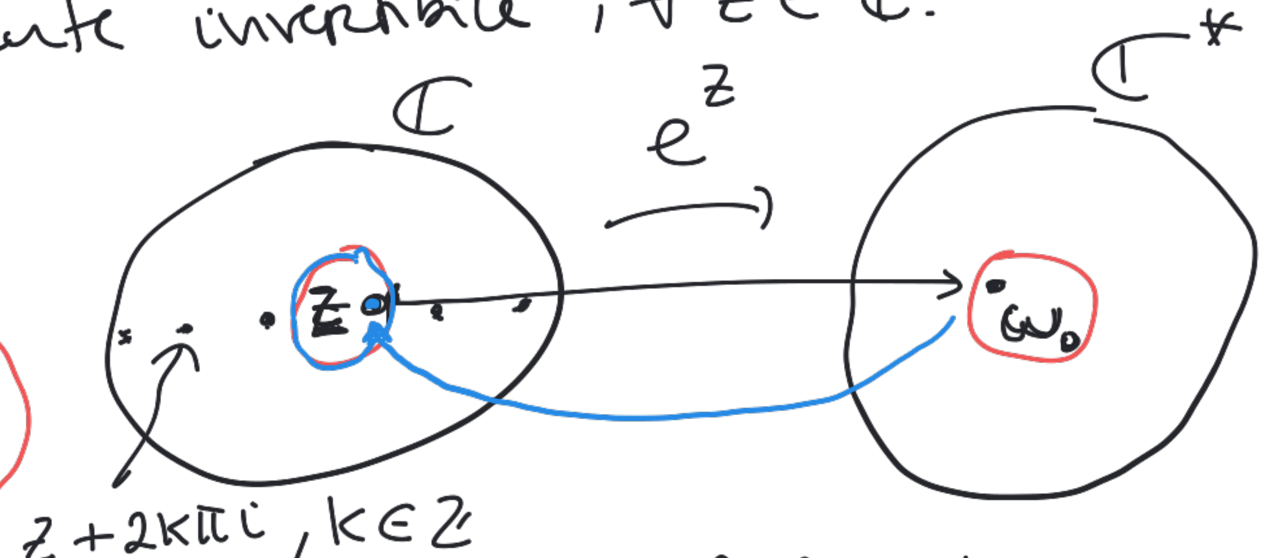
- $f(g(w)) = F(g(w) - z_0) + f(z_0) = F(G(w-w_0)) + f(z_0)$
  $= w - w_0 + \underbrace{f(z_0)}_{= w_0} = w$
- $g(f(z)) = \dots = z$.

Esempi

- $f(z) = \cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \dots$ non è localmente invertibile in $z=0$

- $f(z) = \operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots$ è localmente invertibile in $z=0$.

- $f(z) = e^z$ è localmente invertibile, $\forall z \in \mathbb{C}$.
  $(f'(z) = e^z \neq 0,\ \forall z \in \mathbb{C})$

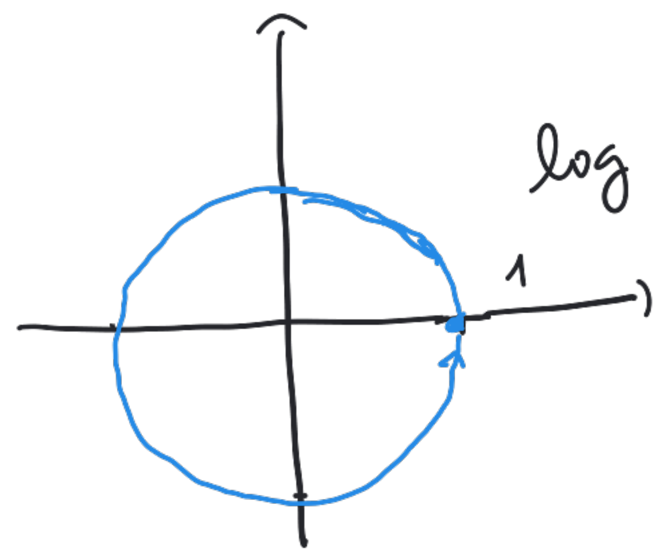


→ **Non** vuol dire che f è invertibile su tutto $\mathbb{C}$!

Infatti, $\forall w_0 \in \mathbb{C}^*$, esiste una determinazione del logaritmo $\log(w)$ in un intorno di w_0 che in w_0 abbia un certo valore fissato (una predeterminazione di $\log w_0$).

⇝ $[\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*]$ è un rivestimento (il rivestimento universale di $\mathbb{C}^*$)

OSS. Una determinazione del logaritmo non può essere analitica su tutto $\mathbb{C}^*$ (perché non è nemmeno continua)



$$\log(z) = \underbrace{\log|z|} + \underbrace{i\arg(z)}$$