III 3. Primitiva locale di una funzione olomorfa, il teorema di Goursat

Obbiettivo: Sia $f: U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa, U aperto connesso.

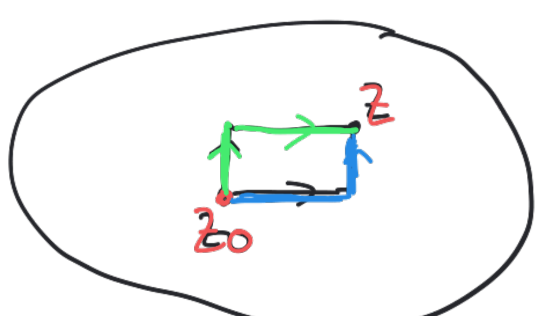
Allora $\left[\forall D_R(z_0) \subset U, \ \exists g : D_R(z_0) \to \mathbb{C} \text{ t.c. } g' = f|_{D_R(z_0)} \right]$

Tentativo: $$g(z) = \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta \ ,$$

dove γ è un qualsiasi cammino tra z_0 e z.

$\to$ Problema l'integrale potrebbe dipendere dal cammino...

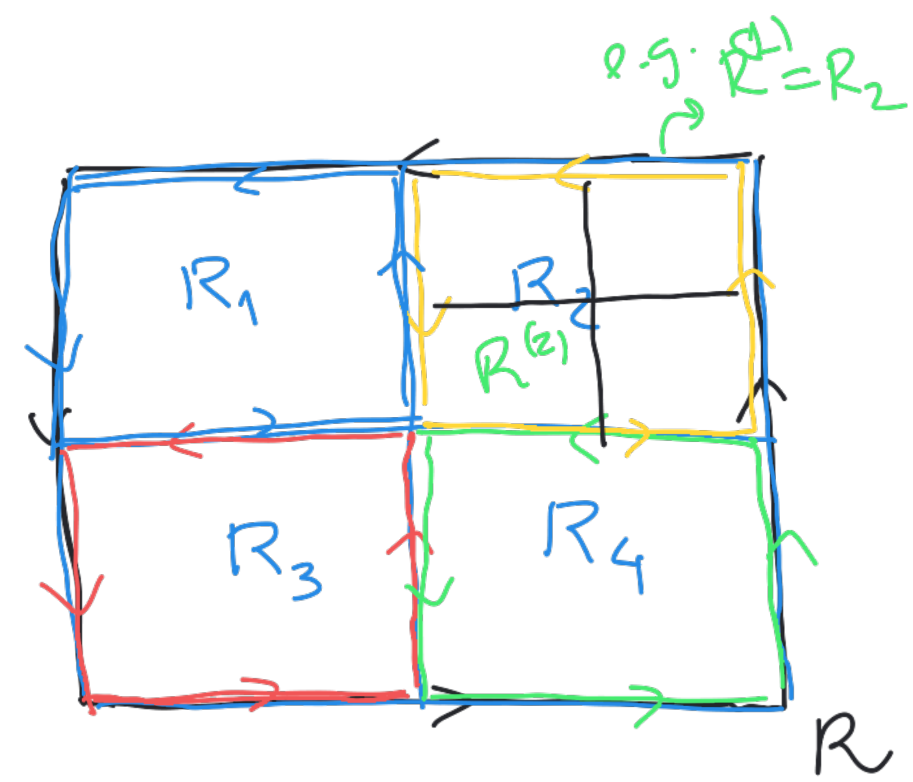
Idea: definire l'integrale lungo un cammino rettangolare, mostrando che non dipende dai lati del rettangolo scelti.



$\leadsto$ T. Goursat garantisce che l'integrale non dipende dalla scelta di lati.

Teorema (**Goursat**) Sia R un rettangolo in $\mathbb{C}$ e sia f olomorfa in R (i.e., f è olomorfa in un'aperto contenendo R).

Allora $$\boxed{\int_{\partial R} f = 0}$$



__dim__
$$\int_{\partial R} f = \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial R_i} f$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\partial R} f \right| \leq \sum_{i=1}^{4} \left| \int_{\partial R_i} f \right|$$

$$\Rightarrow \exists\, R^{(1)} \in \{R_1, R_2, R_3, R_4\} : \left| \int_{\partial R^{(1)}} f \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial R} f \right|$$

Decomponendo $R^{(1)}$ di nuovo in 4 rettangoli, troviamo $R^{(2)}$ t.c.
$$\left| \int_{\partial R^{(2)}} f \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial R^{(1)}} f \right| \geq \frac{1}{4^2} \left| \int_{\partial R} f \right|.$$

Proseguendo con questa procedura, otteniamo

$$\underset{\substack{\| \\ R^{(0)}}}{R} \supset R^{(1)} \supset R^{(2)} \supset \dots \supset R^{(n)} \supset R^{(n+1)} \supset \dots$$

$$\left| \int_{\partial R^{(n+1)}} f \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial R^{(n)}} f \right|$$

$$\underset{\forall n}{\Longrightarrow} \left| \int_{\partial R^{(n)}} f \right| \geq \frac{1}{4^n} \left| \int_{\partial R} f \right|$$

Sia $L_n = L(R^{(n)})$. Allora $L_{n+1} = \frac{1}{2} L_n$

$$\Longrightarrow L_n = \frac{1}{2^n} L_0 = \frac{1}{2^n} L(R)$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\bigcap_{n=1}^{\infty} R^{(n)} = \{z_0\}, \quad z_0 \in R.}$$

Infatti, siccome $L_n \longrightarrow 0$,

$\bigcap_{n=1}^{\infty} R^{(n)}$ consiste, al più, di un punto.

D'altra parte, se consideriamo α_n, il centro di $R^{(n)}$.

(... ← ex)

Allora $\{\alpha_n\}$ è di Cauchy $\Rightarrow \exists\ z_0 = \lim \alpha_n$.

Ma $z_0 \in R^{(n)}$, $\forall n$, perché $R^{(n)}$ chiuso

$\Rightarrow z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} R^{(n)}$

e quindi $\{z_0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} R^{(n)}$

[Ric. in uno spazio metrico completo, una successione di chiusi $D_1 \supset D_2 \ldots \supset D_n \supset \ldots$ è tale che $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \neq \emptyset$]

f è olomorfa in $z_0 \Longrightarrow \exists R>0 : \forall z \in D_R(z_0)$,

$$\boxed{f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + (z-z_0)\, h(z), \text{ con } \lim_{z \to z_0} h(z) = 0.}$$

Per $n \gg 0$, $R^{(n)} \subset D_R(z_0)$

analitica perché intera → ammette una primitiva

$$\Longrightarrow \int_{\partial R^{(n)}} f \, dz = \underbrace{\int_{\partial R^{(n)}} f(z_0) \, dz}_{\to\, 0} + f'(z_0) \underbrace{\int_{\partial R^{(n)}} (z-z_0) \, dz}_{0} + \int_{\partial R^{(n)}} (z-z_0)\, h(z) \, dz$$

$$= \int_{\partial R^{(n)}} (z-z_0)\, h(z) \, dz$$

Quindi

$$\frac{1}{4^n} \left| \int_{\partial R} f \, dz \right| \leq \left| \int_{\partial R^{(n)}} f \, dz \right| = \left| \int_{\partial R^{(n)}} (z-z_0)\, h(z) \, dz \right|$$

Ma $\displaystyle \left|\int_{\partial R^{(n)}} (z-z_0)\, h(z)\, dz\right| \leq \int_{\partial R^{(n)}} |z-z_0|\,|h(z)|\, dz$

$$\leq L(\partial R^{(n)}) \cdot \sup_{z\in \partial R^{(n)}} |z-z_0| \cdot |h(z)|$$

$$\leq L(\partial(R^{(n)})) \cdot \operatorname{diam} R^{(n)} \cdot \sup_{z\in \partial R^{(n)}} |h(z)|$$

Ma

- $\operatorname{diam} R^{(n)} = \frac{1}{2^n} \operatorname{diam} R$
- $L(\partial R^{(n)}) = \frac{1}{2^n} L_0 = \frac{1}{2^n} L(R)$

$$\Longrightarrow \left|\int_{\partial R} f\right| \leq 4^n \cdot \frac{1}{2^n} \operatorname{diam}(R) \cdot \frac{1}{2^n} L(R) \cdot \sup_{z\in\partial R^{(n)}} |h(z)|$$

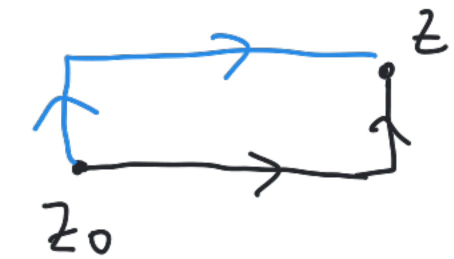
$n \to \infty$ $\to 0$

$\left(\lim_{z\to z_0} h(z) = 0\right)$

$$\Longrightarrow \boxed{\int_{\partial R} f = 0} \quad \blacksquare$$

__Conclusione:__ Se f è olomorfa in z_0,

se definiamo $\boxed{g(z) := \int_\gamma f(z)\,dz ,}$



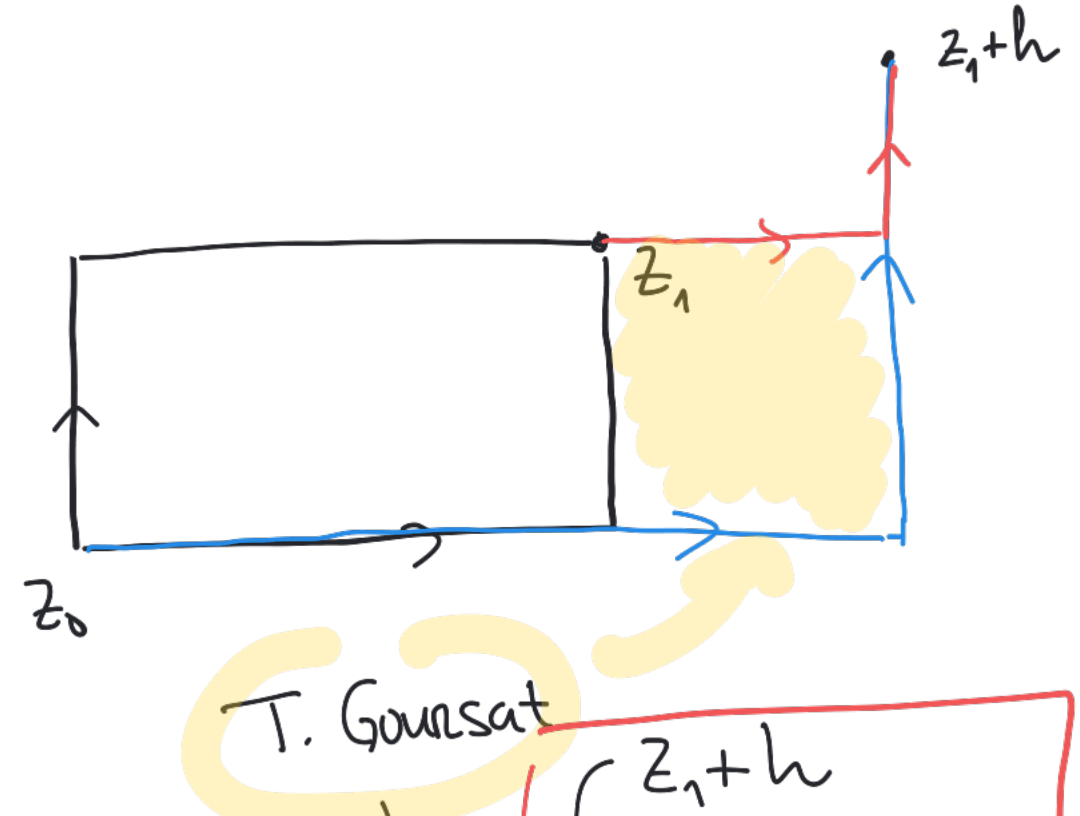
dove γ è uno dei due cammini in ∂R da z_0 a z,
otteniamo che g è ben definita in un intorno di z_0.

$\rightsquigarrow$ vediamo che g è differenziabile e che $g'(z)=f(z)$:

__Teorema__ Sia $f: D_R(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa.
Allora la funzione $g: D_R(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ come definita sopra è differenziabile ed è una primitiva di f.
In particolare, l'integrale di f lungo un qualunque cammino chiuso contenuto in $D_R(z_0)$ è 0.

dim

$z_1 \in D$, $g(z_1) = \displaystyle\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz$
$\quad \| $
$D_R(z_0)$



$\rightsquigarrow$ g è diff. in z_1 ?

Dato h : $z_1+h \in D$,

$$g(z_1+h) - g(z_1) = \int_{z_0}^{z_1+h} f(z)\,dz - \int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = \boxed{\int_{z_1}^{z_1+h} f(z)\,dz}$$

Essendo f olomorfa, e' anche continua in z_1

$\Longrightarrow \exists$ una funzione continua ψ : $\boxed{f(z) = f(z_1) + \psi(z)}$

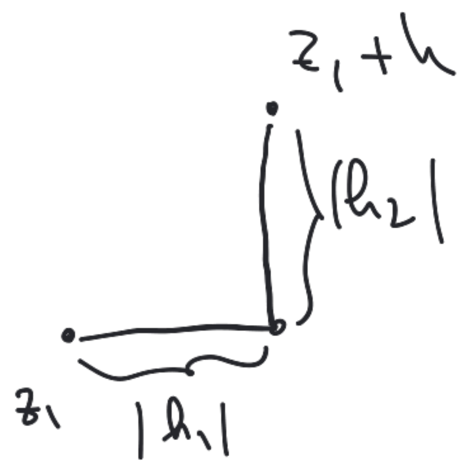
con $\boxed{\lim_{z \to z_1} \psi(z) = 0}$.

Abbiamo allora che

$$g(z_1+h) - g(z_1) = \int_{z_1}^{z_1+h} f(z_1)\,dz + \int_{z_1}^{z_1+h} \psi(z)\,dz$$

$f(z) = f(z_1) + \psi(z)$

$$= h\, f(z_1) + \int_{z_1}^{z_1+h} \psi(z)\,dz$$



Se $h = h_1 + i h_2 \Rightarrow$ la lunghezza del cammino γ da z_1 a z_1+h è $|h_1|+|h_2|$

Quindi,

$$\boxed{\frac{g(z_1+h) - g(z_1)}{h}} = f(z_1) + \frac{1}{h}\int_{z_1}^{z_1+h} \psi(z)\,dz$$

e

$$\left|\frac{1}{h}\int_{z_1}^{z_1+h} \psi(z)\,dz\right| \le \frac{1}{|h|} L(\gamma) \sup_{z\in\gamma} |\psi(z)| = \underbrace{\frac{|h_1|+|h_2|}{|h|}}_{\to 1} \underbrace{\sup_{z\in\gamma} |\psi(z)|}_{|h|\to 0}\ 0$$

In conclusione,

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{g(z_1+h) - g(z_1)}{h} = f(z_1)}$$

■