Serie di potenze convergenti - 2

Formula di Hadamard per il raggio di convergenza

Ric. che

Def Data una sequenza di numeri reali $\{t_n\}$ limitata superiormente, esiste $\boxed{\lambda = \limsup t_n}$.

Il lim sup è un numero t.c.,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad (\otimes) \quad \begin{cases} \# \{n : t_n \geq \lambda + \varepsilon\} < \infty \\ \# \{n : \lambda - \varepsilon < t_n\} \text{ è infinito} \end{cases}$$

Esercizio: $(\otimes)$ caratterizza $\limsup \{t_n\}$.

Notazione: Se $\{t_n\}$ non è limitata superiormente, diciamo che $\limsup t_n = \infty$

OSS Se $\{t_n\}$ ammette limite, allora $\lim t_n = \limsup t_n$.

Teorema Sia $\sum a_n z^n$ una serie di potenze (complesse) e sia R il suo raggio di convergenza. Allora

$$\frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{1/n}$$

(e quindi, se il limite esiste, $\frac{1}{R} = \lim |a_n|^{\frac{1}{n}}$).

- Se $R=0$, questo vuol dire che $\{|a_n|^{\frac{1}{n}}\}$ è una succ. non limitata
- Se $R=\infty$, questo vuol dire che $\limsup |a_n|^{1/n} = 0$.

2 Dato $\varepsilon>0$, abbiamo che per una infinità di n,

$R \leq \frac{1}{t}$

$$|a_n|^{1/n} \geq t-\varepsilon$$

$$\Rightarrow |a_n| \geq (t-\varepsilon)^n \quad \text{per una infinità di } n.$$

Quindi, se $|z| = \frac{1}{t-\varepsilon}$, la serie $\sum a_n z^n$

non è convergente perché

$$|a_n||z|^n \geq (t-\varepsilon)^n \left(\frac{1}{t-\varepsilon}\right)^n = 1,$$

quindi il termine generale della serie

non ha limite 0, e quindi è divergente.

Concludiamo che, $\forall\, \varepsilon$, $R \leq \frac{1}{t-\varepsilon} \Rightarrow R \leq \frac{1}{t}$.

$\rightarrow$ Caso $t=0$ o $t=\infty$ $\rightarrow$ esercizio.