III. 2 Integrali in cammini

Def Sia $f : \overset{\subset \mathbb{R}}{[a,b]} \longrightarrow \mathbb{C}$ funzione continua

$$t \longmapsto \left[f(t) := \underset{\substack{\| \\ \mathrm{Re}(f(t))}}{u(t)} + i \underset{\substack{\| \\ \mathrm{Im}(f(t))}}{\underbrace{v(t)}} \right]$$

Allora definiamo

$$\boxed{\int_a^b f(t)\, dt := \int_a^b u(t)\, dt + i \int_a^b v(t)\, dt}$$

Una conseguenza immediata del T. Fond. del Calcolo e' che, data $G : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, allora

$$t \longmapsto \int_a^t f(s)\, ds$$

G e' differenziabe e vale che $G' = f$.

Def Sia f una funzione continua in un' aperto U, e sia γ una curva contenuta in U.

$f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Allora

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\, dz} := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

se $\gamma : [a,b] \to U \subset \mathbb{C}$

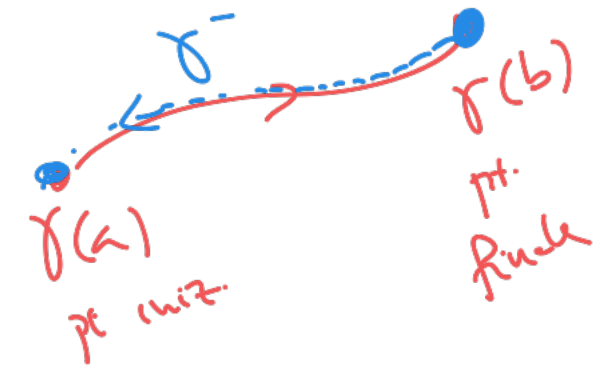
$t \longmapsto \gamma(t)$

Dato invece un cammino continuo

$\gamma = \{\gamma_1, .., \gamma_n\}$.

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)\, dz$$

Esercizi: Data una curva $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, la sua opposta è la curva



$$\gamma^- : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto \gamma(a+b-t)$$

(γ e γ^- contengono gli stessi punti, ma percorsi in sensi opposti $\to$ si scambiano i punti iniziale e finale).

Allora
$$\int_{\gamma^-} f \, dz = - \int_{\gamma} f \, dz .$$

Esercizio $\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$ $\rightsquigarrow$ dim usando la def. di int. con le somme di Riemann

- Sia $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva. Definiamo la <u>lunghezza</u> di γ come

$$\boxed{L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt,}$$

ossia, l'integrale della velocità di γ.

- Se $\underline{\gamma} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ è un cammino continuo,

$$L(\underline{\gamma}) = \sum_{i=1}^{n} L(\gamma_i).$$

Teorema Sia f continua in U. Sia γ un cammino in U.

Allora
$$\boxed{\left|\int_\gamma f\right| \leq \|f\|_\gamma \, L(\gamma)}\,, \quad \text{dove}$$

$$\|f\|_\gamma = \max_{t \in [a,b]} |f(\gamma(t))| \quad \text{e} \quad \gamma : [a,b] \longrightarrow U$$

dim

γ curva
$$\left|\int_\gamma f \, dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt\right|$$

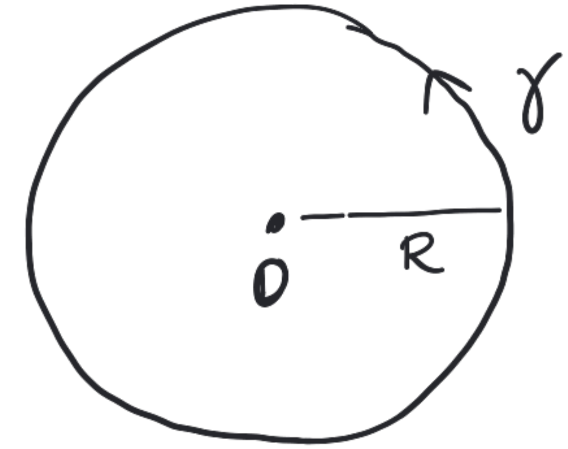
$$\underset{\text{esercizio}}{\leq} \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| \, dt \leq \int_a^b \|f\|_\gamma \cdot |\gamma'(t)| \, dt$$

$$= \|f\|_\gamma \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt = \|f\|_\gamma \cdot L(\gamma). \quad \blacksquare$$

$\gamma = \{\gamma_1, .., \gamma_n\} \rightarrow$ segue dal caso delle curve (esercizio).

Esempio Sia $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$

$\theta \longmapsto Re^{i\theta}$



e sia $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\leadsto$ Come calcolare $\displaystyle\int_\gamma z^n \, dz$?

$$\int_\gamma z^n \, dz = \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^n \cdot iRe^{i\theta} \, d\theta = i \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^{n+1} \, d\theta$$

Ma $(Re^{i\theta})^{n+1} = \begin{cases} 1 & n = -1 \\ \left(\dfrac{(Re^{i\theta})^{n+2}}{i(n+2)} \right)' & n \neq -1 \end{cases}$

$$\int_\gamma z^n \, dz = \begin{cases} i \displaystyle\int_0^{2\pi} 1 \, d\theta = 2\pi i, & n = -1 \\ i \dfrac{R^{n+2}}{i(n+2)} \cancelto{0}{\left[(e^{i2\pi})^{n+2} - (e^{i0})^{n+2} \right]} = 0, & n \neq -1 \end{cases}$$

Q. Ma avrebbe senso scrivere

$\int_{C_R} f(z)\,dz$, dove C_R è la circonferenza di centro nell'origine e raggio R, senza specificare la parametrizzazione?

Sì !

Lemma L'integrale $\int_\gamma f$ è indipendente dalla parametrizzazione di γ, i.e., sia $g : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ una riparametrizzazione

$$a \longmapsto c$$
$$b \longmapsto d$$

Sia $\gamma : [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva e $\psi := \gamma \circ g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$

Allora $\boxed{\int_\gamma f = \int_\psi f}$, $\forall f$ continua in un'aperto U contenendo l'immagine di γ.

dim

$$\int_\psi f = \int_a^b f(\gamma\circ g)\,(\gamma\circ g)'\,dt =$$

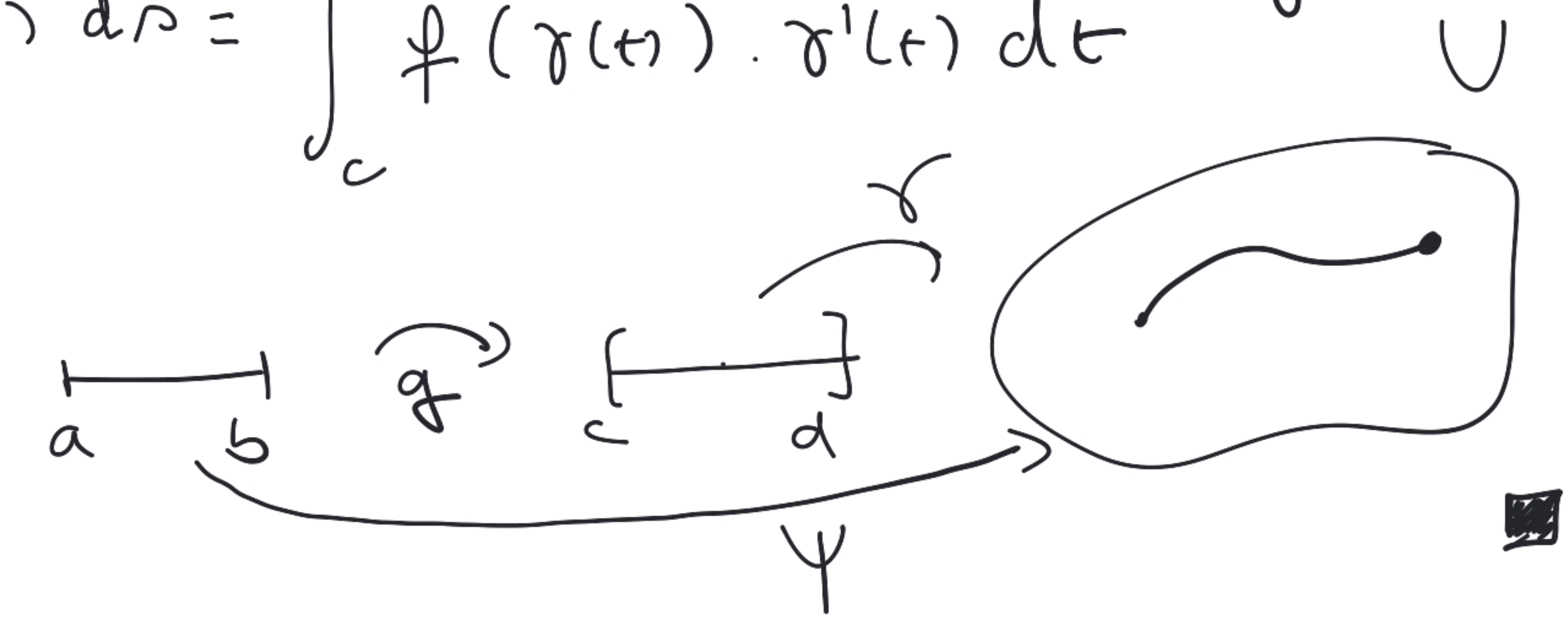
$$= \int_a^b \underbrace{f(\gamma(g(t)))\cdot\gamma'(g(t))}_{F(g(t))}\cdot\underbrace{g'(t)}_{g'(t)}\,dt$$

$$F(s) = (f\circ\gamma)(s)\,\gamma'(s)$$

$$= \int_c^d F(s)\,ds = \int_c^d f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_\gamma f$$

cambio di variabili in un integrale reale

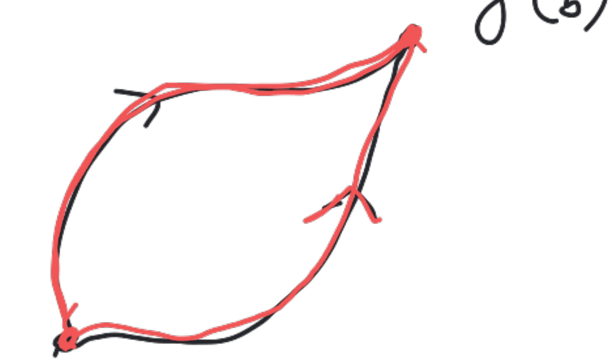
$$[a,b] \xrightarrow{g} [c,d]$$



Teorema Sia f continua in un aperto U, e supponiamo che f possiede una primitiva g in U, i.e., $\exists\, g$ olomorfa in U t.c. $g'=f$. Siano $\alpha, \beta \in U$ e γ un cammino in U da α a β.
Allora

$$\boxed{\int_\gamma f = g(\beta) - g(\alpha).}$$

In particolare, l'integrale dipende soltanto dal punto iniziale e dal punto finale e non dipende dal cammino in sé.

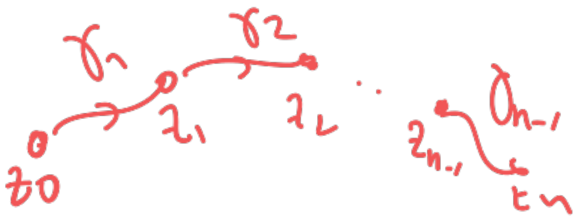


__dim__ Possiamo ridurci al caso in cui γ sia una curva. Infatti, se γ è un cammino continuo $\gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, γ_i curva tra z_{i-1} e z_i, allora

$$\int_\gamma f = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f = \cancel{g(z_1)} - g(z_0) + \cancel{g(z_2)} - \cancel{g(z_1)} + \dots + g(z_n) - \cancel{g(z_{n-1})}$$

$$= g(z_n) - g(z_0)$$

$$= \boxed{g(\beta) - g(\alpha)}$$



Supponiamo quindi che γ sia una curva (differenziabile)

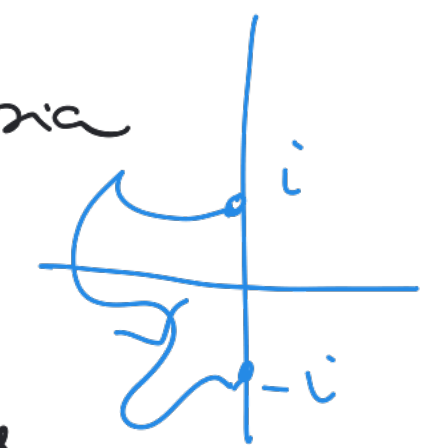
$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$

Allora $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt \underset{g'=f}{=}$

$$= \int_a^b g'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_a^b (g\circ\gamma)'(t)\,dt \underset{\text{TFC}}{=}$$

$$= (g\circ\gamma)(b) - (g\circ\gamma)(a) = g(\beta) - g(\alpha). \quad \blacksquare$$

Esempio: Sia γ un cammino da i a $-i$ e sia $f(z) = z^2$. Calcolare $\boxed{\int_\gamma z^2\,dz.}$



Essendo $g(z) = \frac{z^3}{3}$ una primitiva di f, abbiamo che

$$\int_\gamma z^2\,dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=i}^{z=-i} = \frac{(-i)^3}{3} - \frac{i^3}{3} = +\frac{i}{3} - \frac{-i}{3} = \frac{2i}{3}.$$

Esempio $\int_\gamma e^z\,dz$, con γ un cammino da $i\pi$ a 0.

$$\int_\gamma e^z\,dz = e^0 - e^{i\pi} = 1-(\cos\pi + i\sin\pi)$$
$$(e^z)' = e^z \qquad = 1-(-1) = 2.$$

Corollario Se f è una funzione continua in U ammettendo una primitiva olomorfa g, e se γ è un cammino chiuso in U, allora

$$\boxed{\int_\gamma f = 0}$$

$\rightsquigarrow$ Vedremo che è vero il vice-versa in un'aperto $\boxed{\text{connesso}}$.

Esempio Avevamo visto che

$$\int_{C_R} z^n \, dz = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{se } n = -1. \end{cases}$$

Conclusione La funzione $f(z) = \frac{1}{z}$ non

$\nexists$ primitive ~~in~~ ammette una primitiva in una
di $\frac{1}{z}$ intorno a 0 regione contenendo l'origine.
$\Updownarrow$
$\nexists$ log in un "intorno" di z

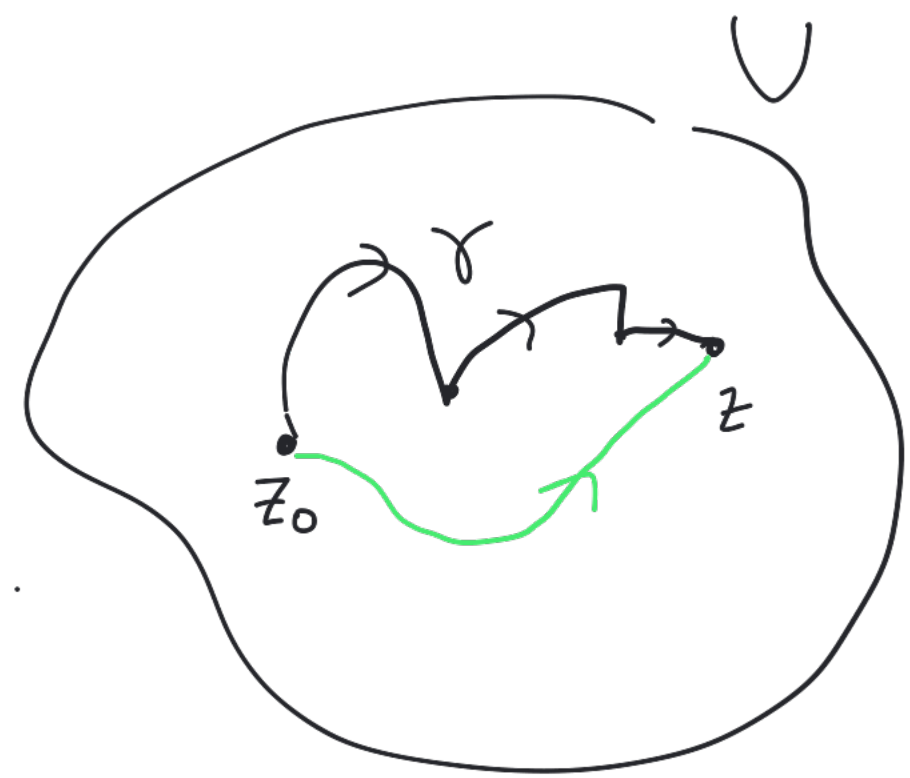
OSS. Quando vedremo che olomorfo $\Rightarrow$ analitico,
l'integrazione di una funzione olomorfa $\sum a_n (z-z_0)^n$
si ridurrà a integrare termine per termine $a_n (z-z_0)^n$!

Teorema [Esistenza di una primitiva in un aperto connesso]

Sia U un'aperto connesso e sia f una funzione continua in U. Allora, se l'integrale di f lungo qualunque curva chiusa contenuta in U è zero, allora esiste una primitiva g per f in U, i.e., $\exists\, g$ olomorfa in U tale che $g' = f$.

dim Fissiamo $z_0 \in U$ e definiamo

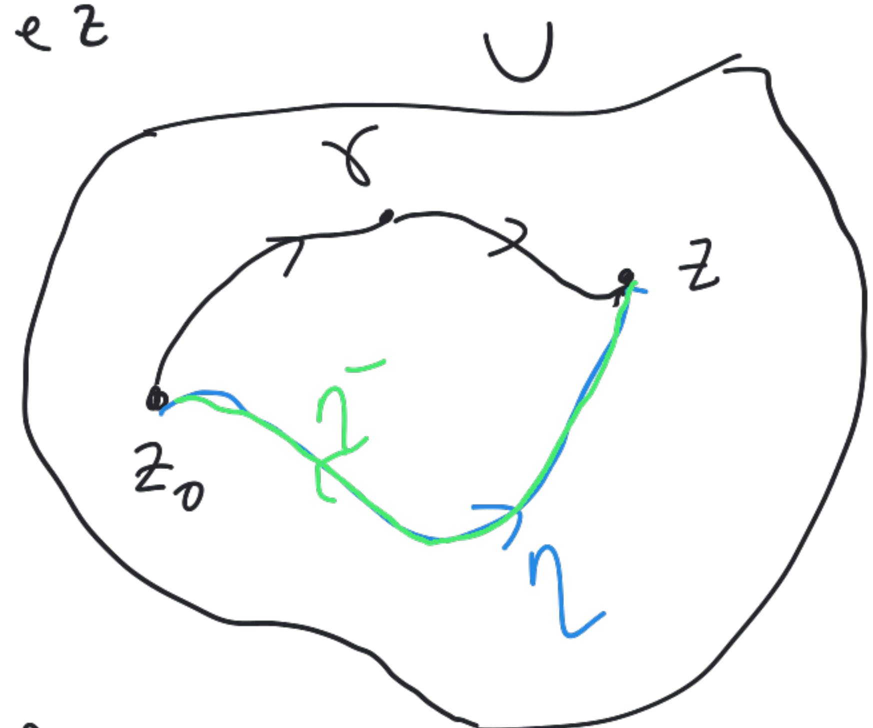
$$\boxed{g(z) = \int_\gamma f(z)\, dz},$$



dove γ è un cammino da z_0 a z.

$\rightsquigarrow$ g è ben definita?

Sia η un'altro cammino tra z_0 e z



Sia η^- il cammino opposto a η.

Per l'esercizio all'inizio della lezione,
$$\int_{\eta^-} f\, dz = -\int_{\eta} f\, dz$$

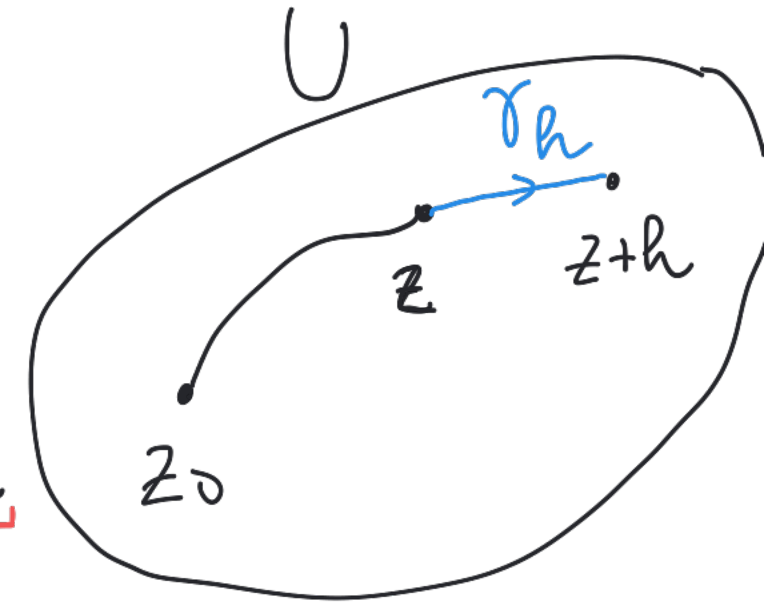
In più, $\{\gamma, \eta^-\}$ e' un cammino chiuso,

quindi per ipotesi
$$\int_{\{\gamma,\eta^-\}} f\, dz = 0 \iff$$

$$\iff \int_\gamma f\, dz - \int_\eta f\, dz = 0$$

$$\iff \int_\gamma f\, dz = \int_\eta f\, dz \rightsquigarrow g \text{ e' ben definita!}$$

• g è una primitiva per f:



$$\lim_{h\to 0} \frac{g(z+h)-g(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{\gamma_h} f(t)\,dt,$$

dove γ_h è un cammino tra z e $z+h$

Prendiamo γ_h il segmento tra z e $z+h$:

$$\begin{aligned} \gamma_h : [0,1] &\longrightarrow U \\ t &\longmapsto z+th \end{aligned}$$

Allora $\displaystyle \frac{1}{h}\int_{\gamma_h} f(z)\,dz = \frac{1}{h}\int_0^1 f(z+th)\cdot h\,dt$

$$= \int_0^1 \Big(f(z) + \big[f(z+th) - f(z) \big] \Big)\,dt =$$

$$= f(z) + \underbrace{\int_0^1 \big[f(z+th) - f(z) \big]\,dt}_{\xrightarrow{h\to 0}\ 0}$$

Ma $\lim\limits_{h\to 0} \int_0^1 [f(z+th)-f(z)]\,dt = 0$

Infatti, $\left| \int_0^1 [f(z+th)-f(z)]\,dt \right| \leq \int_0^1 |f(z+th)-f(z)|\,dt$

$$\underset{\text{Teorema}}{\leq} \max_{t\in[0,1]} \underbrace{|f(z+th)-f(z)|}_{\to 0} \cdot \overbrace{L(\gamma_h)}^{\to 0} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

(f e' continua).

Concludiamo quindi che

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(z+h)-g(z)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[f(z) + \overbrace{\int_0^1 [f(z+th)-f(z)]\,dt}^{\to 0} \right]$$

$$= f(z)$$

Quindi g è differenziabile e $g'(z)=f(z)$, $\forall z\in U$. ∎

OSS Questo teorema è analogo al teorema che relaziona l'esistenza di un potenziale per un campo di vettori con l'invarianza dell'integrale per cammini.

Teorema [Integrazione di successioni di funzioni uniformemente convergenti]

1) Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue in U e uniformemente convergenti per f in U. ($\Rightarrow f$ continua)

Allora, per qualunque cammino γ in U,

$$\lim \int_\gamma f_n = \int_\gamma f$$

2) Se $\sum f_n$ converge uniformemente, allora

$$\int_\gamma \sum f_n = \sum \int_\gamma f_n .$$

<u>dim</u> 1) $$\left|\int_\gamma f_n - \int_\gamma f\right| \le \int_\gamma |f_n - f| \le \|f_n - f\|_\gamma L(\gamma)$$

Ma essendo $\{f_n\} \to f$ uniformemente,

$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\gamma \longrightarrow 0$, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \left|\int_\gamma f_n - \int_\gamma f\right| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n = \int_\gamma f.$$

2) Segue da 1) applicato alla successione delle somme parziali. (esercizio).

$\blacksquare$

Esempio IMPORTANTE!

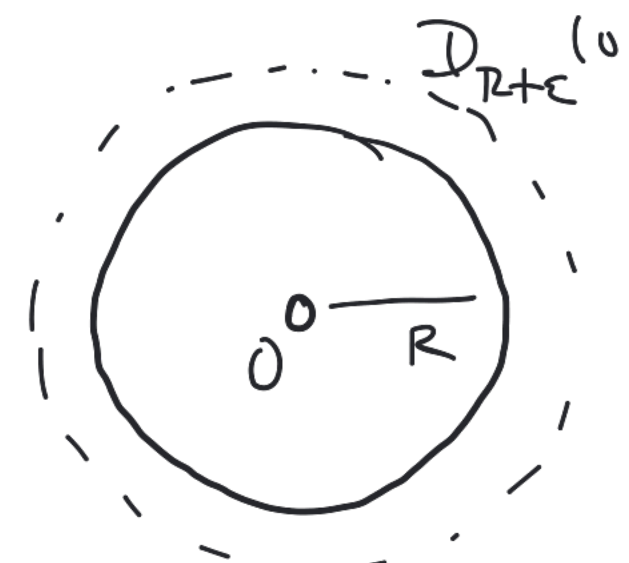
Sia f analitica in un aperto contenendo $\overline{D_R(0)}$, eccetto possibilmente in $z=0$; e supponiamo che

$$f(z) = \underbrace{\frac{a_{-m}}{z^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z}}_{f^-(z)} + \underbrace{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots}_{f^+(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n,}$$

con raggio di conv. $> R$.

(quindi f analitica in $D_{R+\varepsilon}(0) \setminus \{0\}$).

Sia $C_R = \partial\left(D_R(0)\right)$



Allora

$$\int_{C_R} f(z)\,dz = \underbrace{a_{-1}}_{\text{residuo di } f \text{ in } z=0} 2\pi i$$

Infatti, $\displaystyle\int_{C_R} f(z)\,dz = \int_{C_R} f^{-}(z)\,dz + \int_{C_R} f^{+}(z)\,dz$

$$= \int_{C_R} \sum_{k=-m}^{-1} a_k z^k \, dz + \int_{C_R} \sum_{n \geq 0} a_n z^n \, dz$$

$$= \sum_{k=-m}^{-1} a_k \underbrace{\int_{C_R} z^k \, dz}_{\text{tutte zero tranne che l'ordine } -1} + \sum_{n \geq 0} a_n \cancelto{0}{\int_{C_R} z^n \, dz} = \underbrace{a_{-1} \, 2\pi i}.$$

Oss. $f(z) - \dfrac{a_{-1}}{z}$ ha una primitiva su U

$$\Longrightarrow \int_{C_R} \left[f_z - \frac{a_{-1}}{z} \right] dz = 0.$$