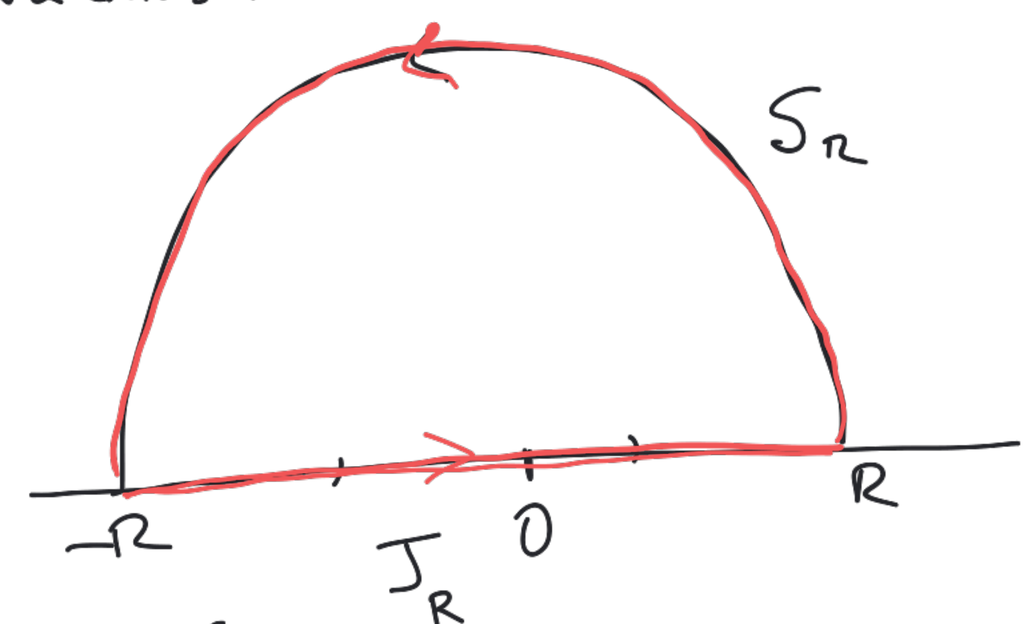
Applicazione del Teorema dei residui al calcolo di integrali indefiniti

Sia $f(x)$ una funzione continua nella variabile reale x.

Obbiettivo: Calcolare
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{0} f(x)\,dx + \lim_{B\to\infty}\int_{0}^{B} f(x)\,dx .$$

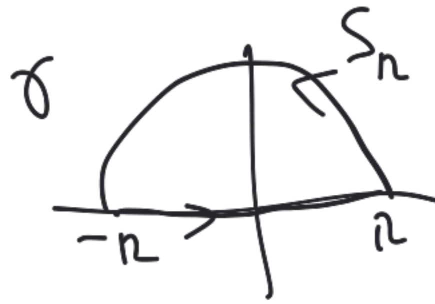
usando T. dei Residui:

consideriamo $\gamma = S_R \cup J_R$ curva chiusa come nella figura.



Supponiamo che $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ è la restrizione di una funzione complessa meromorfa nel semipiano superiore, con un n° finito di poli.

Calcoliamo $\int_\gamma f(z)\,dz$ usando il T. dei Residui.



Se $\displaystyle \lim_{R\to\infty} \int_{S_R} f = 0$, $\otimes$ otteniamo quindi che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum \text{residui di } f \text{ nel semipiano superiore} \qquad \otimes\otimes$$

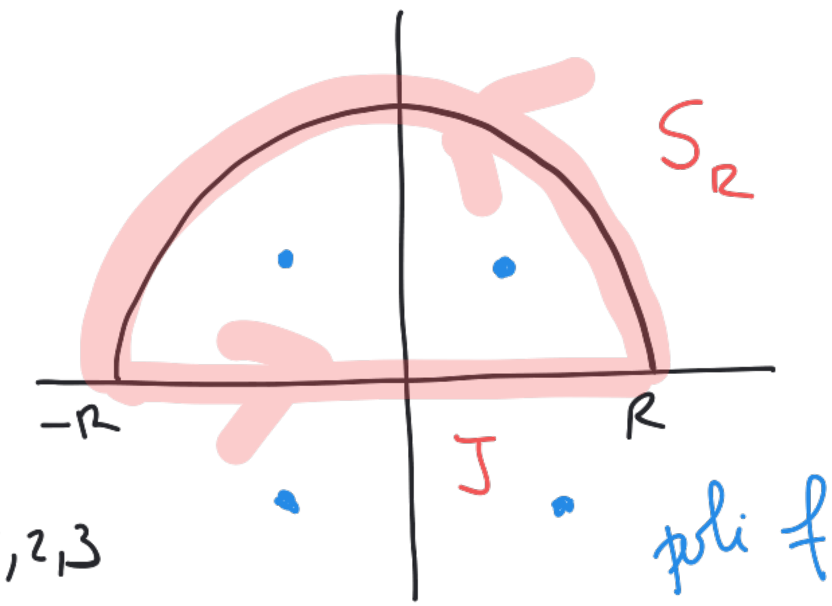
$\longrightarrow$ Vediamo situazioni in cui $\otimes$ vale.

<u>Teorema</u> Supp. che $\exists\, B>0 : \forall\, z : |z| >> 0$, $|f(z)| \leq \dfrac{B}{|z|^2}$.

Allora $\displaystyle \lim_{R\to\infty} \int_{S_R} f = 0$ e vale la formula $\otimes\otimes$.

<u>dim</u> $$\left| \int_{S_R} f\,dz \right| \leq \sup_{z\in S_R} |f(z)| \cdot L(S_R) \leq \frac{B}{|R|^2} \cdot \pi R \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$ ∎

Esempio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx$



Sia $f(z)=\dfrac{1}{z^4+1}$

$z^4+1=0 \iff z^4=-1 \iff z = e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)}$, $k=0,1,2,3$

$\iff z_0 = e^{\frac{i\pi}{4}}$, $z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$, $z_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}}$

Siccome tutti questi sono zeri semplici di z^4+1 (la derivata di z^4+1 non si annulla solo in $z=0$), z_0, z_1, z_2 e z_3 sono poli semplici di $f(z)$.

Tra questi poli, solo z_0 e z_1 appartengono al semipiano superiore.

Infine, se $|z|>>0$, $\dfrac{1}{|z^4+1|} < \dfrac{1}{|z^4|} < \dfrac{1}{|z^2|}$, quindi si applica il teorema.

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\, dx = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z_0} f(z) + \operatorname{Res}_{z_1} f(z) \right)$$

Siccome, per la prop. sul calcolo dei residui,

$$\operatorname{Res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(z^4+1)'}\Big|_{z=z_0} = \frac{1}{(4z^3)}\Big|_{z=e^{\frac{\pi i}{4}}} = \frac{1}{4} e^{-\frac{\pi i}{4}}$$

e analogamente

$$\operatorname{Res}_{z_1} f(z) = \frac{1}{4} e^{-\frac{3\pi i}{4}}$$

In conclusione otteniamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\, dx = \frac{\pi i}{2} e^{-\frac{\pi i}{4}} \left(e^{-\frac{2\pi i}{4}} + 1 \right)$$

$$= \dots = \pi \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

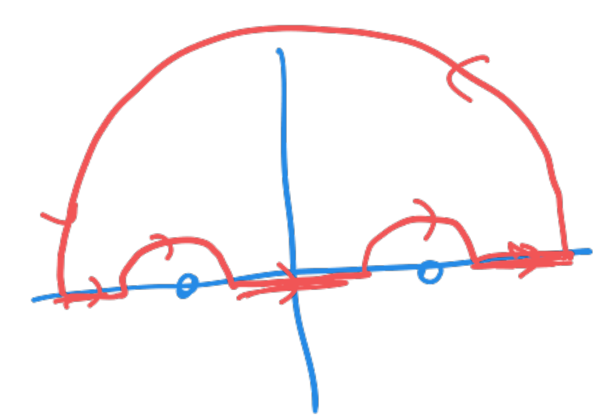
Trasformate di Fourier

Teorema Sia f meromorfa in $\mathbb{C}$ e avendo solo un numero finito di poli non nell'asse degli xx. Supponiamo che esiste una costante K t.c.

$$|f(z)| \le \frac{K}{|z|}, \quad \text{per } |z| >> 0.$$

Sia $a > 0$. Allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{iax}\, dx = 2\pi i \sum \text{residui di } e^{iaz} f(z) \text{ nel semipiano superiore.}$$



dim: vedere Lang, Th. VI, 2.2.

→ Vediamo adesso come procedere nel caso in cui la funzione ha delle singolarità nell'asse degli xx.

<u>Esempio</u> Calcolare $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \underset{\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{1}{4i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} - \frac{e^{-ix}}{x}\,dx =$$

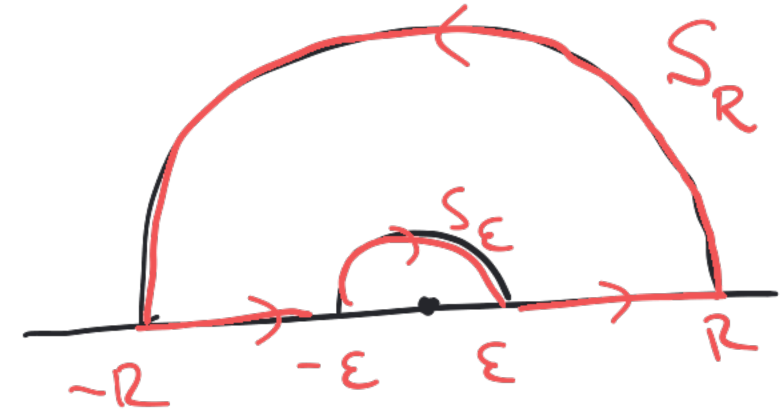
$$= \frac{1}{4i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} + \frac{e^{-ix}}{-x}\,dx = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx =$$

$$= \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \frac{1}{2i}\left[\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx\right]$$

converge (...)

→ int. per parti

Per calcolare il suo valore, usiamo la seguente curva complessa $C = S_R \cup [-R,-\varepsilon] \cup -S_\varepsilon \cup [\varepsilon, R]$.



La funzione $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ non ha alcun polo in $\mathrm{int}(C)$, quindi

$$0 = \int_C \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \underbrace{\int_{S_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz}_{I_R =} + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}\,dz - \underbrace{\int_{S_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}\,dz}_{= I_\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$$

$$\Rightarrow \int_{-R}^{-\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{\varepsilon}^{R} f(z)\,dz = I_\varepsilon - I_R$$

Usando la definizione si riesce facilmente a mostrare che $\lim_{R \to \infty} I_R = 0$. (...)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \ ?$$

Sarà una conseguenza del seguente Lemma:

<u>Lemma</u> Sia g una funzione con un polo semplice in $z=0$. Allora $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon} g(z)\,dz = \pi i \operatorname{Res}_0 g(z)$

<u>dim</u> Sia $g(z) = \frac{a}{z} + h(z)$, con h olomorfa in $z=0$.

Allora $\left|\int_{S_\varepsilon} h(z)\,dz\right| \leq \overbrace{\sup_{z\in S_\varepsilon}|h(z)|}^{\text{limitata}} \cdot \overbrace{L(S_\varepsilon)}^{\to 0} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$

Quindi $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon} g(z)\,dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\frac{a}{z}\,dz = a\pi i.$ ∎

Quindi $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2i}\underbrace{\operatorname{Res}_0\left(\frac{e^{iz}}{z}\right)}_{=1}\cdot \pi i = \frac{\pi}{2}.$

Piano complesso esteso: Sfera di Riemann

Sia $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (comp. di Alexandroff di $\mathbb{C}$: intorni di ∞ sono i complementari di compatti di $\mathbb{C}$)

$\wr\wr$

$S^2 \; (\cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$

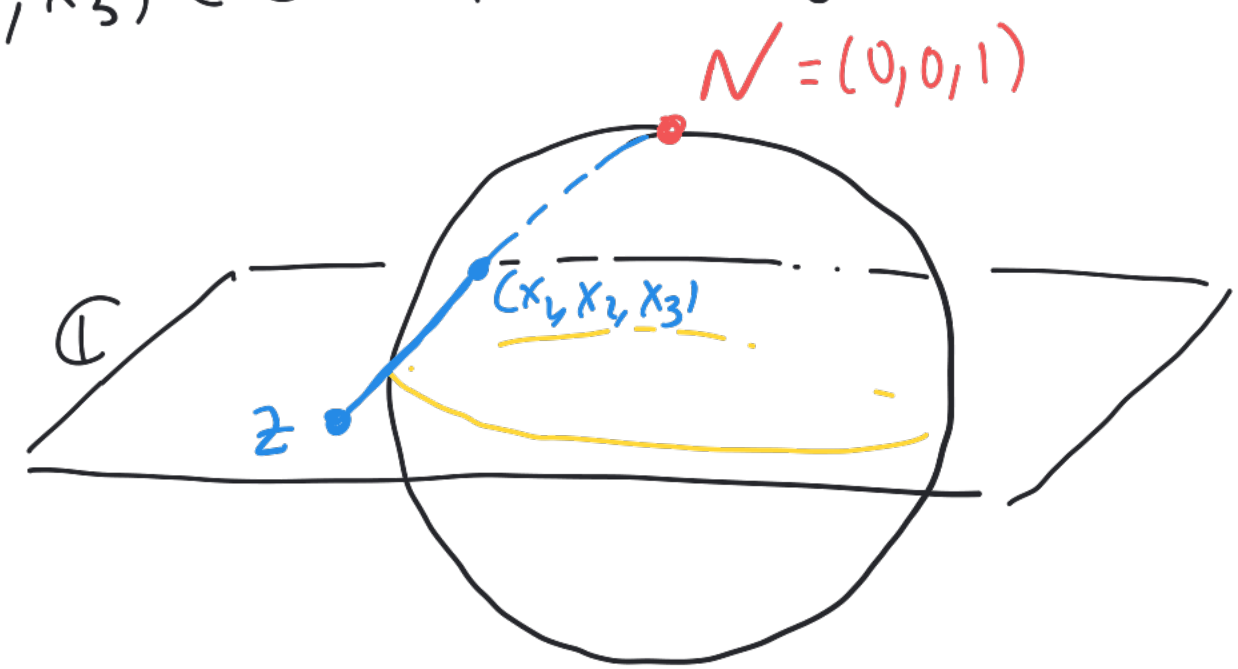
Rap. geometrica: $S^2 : \{(x_1, x_2, x_3) \in S^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$

$$p : S^2 \longrightarrow \tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$N = (0,0,1) \longmapsto \infty$$

$$\underset{S^2 \setminus N}{\underset{\cap}{(x_1, x_2, x_3)}} \longmapsto z = \frac{x_1 + i x_2}{1 - x_3}$$

$$\left(\frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2}, \frac{z - \bar{z}}{i(1 + |z|^2)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \longleftarrow z$$



Possiamo anche vedere $\tilde{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \underbrace{(\mathbb{C}^2 - \{0\}) / \mathbb{C}^*}_{} = \{[x_0 : x_1] \mid (x_0, x_1) \neq (0,0)\}$$

con $(x_0, x_1) \sim (\lambda x_0, \lambda x_1),\ \forall \lambda \in \mathbb{C}^*$

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \supset U_0 = \{ \underset{\substack{\cup\!\!\!\shortmid \\ [1:z]}}{[x_0 : x_1]} : x_0 \neq 0 \} \simeq \mathbb{C}$$

$$\cup \quad U_1 = \{ \underset{\substack{\cup\!\!\!\shortmid \\ [z:1]}}{[x_0 : x_1]} : x_1 \neq 0 \} \simeq \mathbb{C}$$

→ La proiezione stereografica può estendersi a un omeomorfismo tra S^2 e $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$:

$$p: S^2 \setminus \{N\} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{C} \xrightarrow{\simeq} U_0$$

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto \frac{x_1 + i x_2}{1 - x_3} \longmapsto \left[1 : \frac{x_1 + i x_2}{1 - x_3}\right] = [1 - x_3 : x_1 + i x_2].$$

$$N \longmapsto [0:1] = \infty$$

Sia $S := \overline{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq S^2$ la sfera di Riemann.

Sia $f : S \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione in S

Sia $t = \frac{1}{z}$ e definiamo $g(t) = f(\frac{1}{t})$

<u>Def.</u> f ha una singolarità isolata (risp è meromorfa, olomorfa) in ∞ se g ha una singolarità isolata (risp. è meromorfa, olomorfa) in 0. L'ordine di g in 0 sarà anche l'ordine di f in ∞.

Se g ha una sing. rimuovibile in 0, e che quindi si può estendere a una funzione olomorfa in 0, allora diciamo che f è olomorfa in ∞.

- Diciamo che f è meromorfa (risp. olomorfa) in S se è meromorfa (risp. olomorfa) in $\mathbb{C}$ e in ∞.

Mostriamo che:

1) • Le uniche funzioni meromorfe in S sono le funzioni razionali, i.e., quozienti di polinomi

2) • Le uniche funzioni olomorfe in S sono le costanti.

3) • Se f è olomorfa in $\mathbb{C}$ e ha un polo in ∞ allora f è un polinomio.

2) Supp. che f è olomorfa in S. Allora g ha una singolarità rimuovibile in 0, il che implica che g è limitata in un intorno di 0. Quindi, per costruzione di g, e siccome gli intorni di ∞ in S sono complementari di compatti di $\mathbb{C}$, otteniamo che f è limitata all'esterno di un disco, e quindi limitata anche in $\mathbb{C}$ $\underset{\text{Liouville}}{\Longrightarrow}$ f è costante.

3) Supp. adesso che f è olomorfa in $\mathbb{C}$ e che ha un polo in ∞. Allora, se

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad , z \in \mathbb{C}$$

è lo sviluppo di f in $z=0$, otteniamo che

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{t}\right)^n$$

Se g ha un polo in $t=0$, allora nello sviluppo di f in $z=0$ ci sono solo un numero finito di termini non nulli. Di conseguenza, f è un polinomio e

$$\deg f = -\operatorname{ord}_0 g .$$

1) Supp. adesso che f sia meromorfa in S.
Essendo S compatto e le singolarità punti isolati di S, ci sono solo un numero finito di poli in S: diciamo (z_i, n_i), $i = 1, \dots, m$, con n_i l'ordine del di f in z_i. Allora se definiamo

$$\varphi(z) = f(z) \prod_{i=1}^{m} (z - z_i)^{n_i},$$

φ è olomorfa in $\mathbb{C}$. Quindi φ è o olomorfa anche in ∞ oppure ha un polo in ∞.
In ogni caso, per 2) e 3), concludiamo che φ è un polinomio, e quindi che f è una funzione razionale. ∎