- In $\mathbb{C}[[T]]$ è vero che f ammette un'inversa per la composizione se $\mathrm{ord}(f)=1$.

  In questo caso, $g \in \mathbb{C}[[T]]$ è t.c. $\begin{cases} f\circ g(T) = T \\ g\circ f(T) = T \end{cases}$

- Inoltre, se f è convergente anche g è convergente.

Per una funzione analitica in generale, non abbiamo bisogno che $\mathrm{ord}(f)$ sia 1 per che ammetta un'inversa per composizione: un esempio è proprio la funzione esponenziale:

$$e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$$ ha ordine 0 e ammette un'inversa locale in $z=0$. Chiaramente questa inversa sarà un logaritmo, definito in un intorno di $1=e^0$.

Infatti, si procede come spiegato alla fine del corollario.

Si considera la funzione

$$F(z) = e^{z} - 1.$$

Questa è analitica in 0 e $F(0)=0$.

Allora esiste un'inversa locale per F, che è una funzione G, analitica in 0 e t.c. $\begin{cases} F \circ G(z) = z \\ G \circ F(z) = z \end{cases}$ in un intorno di 0.

Considerando poi la funzione

$$g(w) = G(w - \overset{f(0)}{1}),$$ otteniamo che

$$f \circ g(w) = f(G(w-1)) = F(G(w-1)) + 1 = w - 1 + 1 = w$$

e analogamente

$$g \circ f(z) = z.$$

In pratica però, ciò che di solito facciamo è considerare come inversa di e^z, localmente intorno a 0, una funzione logaritmo, sviluppata intorno a $z=1\,(=e^0)$.

$$\log(z) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n} \quad , |z|<1.$$

<u>In conclusione</u>: il teorema della funzione inversa ci dà un criterio per l'esistenza di una inversa <u>LOCALE</u> di una funzione intorno a un certo punto. Secondo questo criterio, tale inversa esiste se $f'(z_0) \neq 0$.

<u>Quindi</u>:
- $\sin z$ ha inversa intorno a 0
- $\cos z$ non ha inversa intorno a 0
- e^z ha inversa intorno a 0.