Ric. La scorsa volta abbiamo visto che

- Data $f: U \to \mathbb{C}$ olomorfa e $U \subset \mathbb{C}$ aperto, allora dati $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to U$ cammini omotopi

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

Quindi, se U e' semplicemente connesso, abbiamo che

$$\int_\gamma f = 0, \quad \forall \ \gamma \text{ cammino chiuso.}$$

Applicando il Teorema 2.2, abbiamo

Corollario Sia $f: U \to \mathbb{C}$ olomorfa, U semp. connesso. Allora f possiede una primitiva in U.

Inoltre, se g è la primitiva di f in U, allora dato $z_0 \in U$, $\exists\ c \in \mathbb{C}$ costante t.c.

$$\boxed{g(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta + c}\ ,$$

dove con $\int_{z_0}^{z} f$ indichiamo l'integrale di f lungo qualunque cammino fra z_0 e z in U.

Ad esempio, se f è analitica in $D(z_0, R)$, $R>0$,

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n .$$

Allora $h(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$ è una primitiva di f in $D(z_0, R)$, quindi, $\forall z_0 \in U$, $\exists c \in \mathbb{C}$:

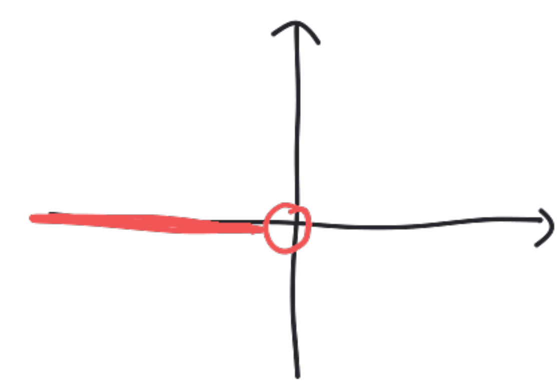
$$h(z) = \int_{z_0}^{z} \sum_{n\geq 0} a_n (\zeta - z_0)^n\, d\zeta + c .$$

<u>OSS</u>. Ric. che $f(z) = \frac{1}{z}$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ma non ammette una primitiva in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Infatti, se $C_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$,

$$\int_{C_R} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i \neq 0$$

In particolare, otteniamo che $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ non è semplicemente connesso.



- D'altra parte, se consideriamo $U := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$, U è semplicemente connesso, quindi esiste una primitiva di $\frac{1}{z}$ su U!

Esempio [Definizione del logaritmo in un semplicemente connesso di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$].

Sia $U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ semplicemente connesso.

Sia $z_0 \in U$ fissato e $w_0 \in \mathbb{C} : e^{w_0} = z_0$

(due tali complessi differiscono di un multiplo di $2\pi i$)

Allora $\log z := w_0 + \int_{z_0}^{z} \frac{1}{\xi} \, d\xi$, lungo qualunque cammino tra z_0 e z

è una primitiva di $f(z) = \frac{1}{z}$ in U e un'altra primitiva di $\frac{1}{z}$ in U differisce da $\log z$ per una costante.

$\rightsquigarrow$ $w_0 + \int_{z_0}^{z} \frac{1}{\xi} \, d\xi$ è l'unica primitiva di $\frac{1}{z}$ che in z_0 ha immagine $\log(z_0) = w_0$.

Proprietà del Logaritmo

1) $\log z = w_0 + \int_{z_0}^{z} \frac{1}{\xi}\, d\xi$ è analitica in U

e $\log z = w_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-z_0}{z_0}\right)^n$, $\quad |z-z_0| < |z_0|$. (e $z \in U$)

2) $e^{\log z} = z$, $\forall z \in U$

3) Data una primitiva di $\frac{1}{z}$ in U, $L(z)$, t.c.

$$e^{L(z)} = z \quad \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}:$$

$$L(z) = \log z + 2\pi i k$$

1) Sia $L_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{n}$, $|z-1| < 1$.

Allora L_1 è analitica in $D(1,1)$ e $(L_1)'(z) = \frac{1}{z}$, $\forall z \in D(1,1)$.

Dato $z_0 \in U$ e w_0: $\boxed{e^{w_0} = z_0}$,

$$L_{z_0}(z) := w_0 + L_1\left(\frac{z}{z_0}\right) = w_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{z-z_0}{z_0}\right)^n, \quad |z-z_0| < |z_0|, \; z \in U$$

e $L'_{z_0}(z) = \frac{1}{z}$ (vedere es. 5, esercit. 4)

$\Rightarrow \exists$ costante α: $L_{z_0}(z) = \log(z) + \alpha$

Ma $L_{z_0}(z_0) = w_0 = \log(z_0) \Rightarrow \alpha = 0$

$\Rightarrow L_{z_0}(z) = \log(z)$ è analitica per punti di z vicini a z_0.

Conseguentemente, otteniamo che

$$e^{\log z} = z, \quad \text{per } z \text{ vicino a } z_0.$$

Infatti, nel primo foglio di esercizi avevamo mostrato che, per $L_1(T) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(T-1)^n}{n}$,

allora $\exp(L_1(T)) = T$ come serie di potenze formali

$\underset{\text{n}}{\Longrightarrow}$ $\exp(\log(z)) = z$ per valori di z vicino a 1.

entrambe sono convergenti

Per $z_0 \neq 1$, $L_{z_0}(z) = w_0 + L_1\left(\frac{z}{z_0}\right)$, per w_0 t.c. $e^{w_0} = z_0$

e $\exp\left(L_{z_0}(z)\right) = \exp\left(w_0 + L_1\left(\frac{z}{z_0}\right)\right) = \exp(w_0) . \exp\left(L_1\left(\frac{z}{z_0}\right)\right)$

$= z_0 \cdot \frac{z}{z_0} = z$, per $\left|\frac{z}{z_0} - 1\right| < 1 \Rightarrow |z - z_0| < |z_0|$.

Inoltre, dato $z_1 \in U$ qualunque,

$$\log z = w_0 + \int_{z_0}^{z} \frac{1}{\zeta}\, d\zeta = \overbrace{w_0 + \int_{z_0}^{z_1} \frac{1}{\zeta}\, d\zeta}^{\text{costante}} + \int_{z_1}^{z} \frac{1}{\zeta}\, d\zeta$$

e usando gli argomenti utilizzati per z_0, otteniamo che $\log z$ e' analitica in $z = z_1$.

Quindi $\log z$ è analitica in U e $e^{\log z} = z$ per valori di z vicini a z_0 $\underset{\uparrow}{\Longrightarrow}$ $e^{\log z} = z$, $\forall z \in U$.

U connesso, $e^{\log z}$ e z analitiche

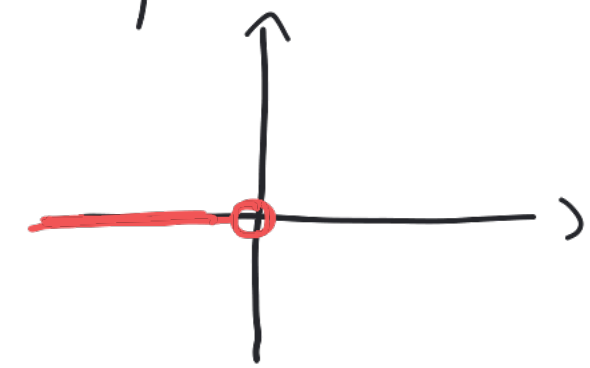
3) Data $L(z)$ primitiva per $\frac{1}{z}$ in U, $L(z) = \log(z) + \alpha$, α costante.

Ma se $e^{L(z)} = z \Longrightarrow e^{\log z + \alpha} = e^{\log z} \cdot e^{\alpha} = z$

$\Longrightarrow e^{\alpha} = 1 \Longrightarrow \alpha = 2\pi i k$, per $k \in \mathbb{Z}$.

Un caso di particolare importanza è quello in cui

$$\boxed{U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}}$$



Possiamo scrivere in modo unico

$$z = R e^{i\theta}, \quad \text{con } -\pi < \theta < \pi$$

Scegliendo $z_0 = R_0 e^{i\theta_0}$ e $w_0 = \log R_0 + i\theta_0$, $-\pi < \theta_0 < \pi$,

sappiamo che
$$\log z = \log R_0 + i\theta_0 + \int_{z_0}^{z} \frac{1}{\zeta}\, d\zeta$$

$$\overset{z=Re^{i\theta}}{=} \log R + i\theta, \quad -\pi < \theta < \pi$$

Infatti, sono entrambe primitive di $\frac{1}{z}$ in U e coincidono in z_0. (esercizio)

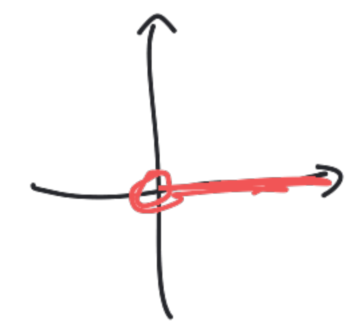
Usando quindi questa def di log z, $\underline{z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_{\leq 0}\} = V_1}$

$$\log(1-i) = \overbrace{\frac{1}{2}\log 2}^{\text{"}\log\sqrt{2}\text{"}} - i\frac{\pi}{4}$$

$$\underline{1-i = \sqrt{2}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}$$

mentre invece $\log(x)$, $x \in \mathbb{R}_{<0}$ non è definito.

Se invece consideriamo $V_2 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$,



otteniamo la determinazione principale di logaritmo,

$$\mathrm{Log}\, z = \log|z| + i \arg z, \quad \underline{0 < \arg z < 2\pi}.$$

in questo caso otteniamo $\mathrm{Log}(1-i) = \underline{\frac{1}{2}\log 2 + i\frac{7\pi}{4}}$

e $\mathrm{Log}(-1) = \overset{0}{\cancel{\log|-1|}} + i \arg(-1) = i\pi.$

Def In modo analogo possiamo definire l'esponenziale complessa in aperti semp. connessi di $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

Sia $U \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ semp. connesso, e $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Allora, fissato un logaritmo $\log z$ in U, definiamo

$$\boxed{z^{\alpha} = e^{\alpha \log z}}, \quad \forall z \in U$$

$\rightsquigarrow$ z^{α} e' analitica in U.

<u>Esempio / Esercizio</u> Sia $f(z)$ una funzione analitica in U, con U semplicemente connesso e $f(z) \neq 0$, $\forall z \in U$.

Siccome $f(U)$ può non essere semp. connesso, non ha senso definire $\log(f(z))$ come $\displaystyle\int_{f(z_0)}^{f(z)} \frac{1}{\zeta}\, d\zeta$

Definiamo invece la funzione analitica

$$L_f(z) = w_0 + \int_{z_0}^{z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta ,$$

con $z_0 \in U$ fissato e $w_0 \in \mathbb{C}$: $\exp(w_0) = f(z_0)$.

Allora:

- $L'_f(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$
- $\exp L_f(z) = f(z)$
- altre scelte di z_0 e w_0 producono un $L_f(z)$ che differisce dall'altro per un multiplo di $2\pi i$.

esercizio

$\log f(z) := L_f(z)$