Principio dell'argomento

Scopo: contare il numero di zeri e poli (con molteplicità) di una funzione meromorfa all'interno di una curva.

Def [Derivata logaritmica]

$$0 \neq f \in \mathcal{M}(U) \rightsquigarrow \frac{f'}{f} \in \mathcal{M}(U)$$

$$\frac{f'}{f} = \left(\log(f(z))\right)'$$

se esiste il logaritmo

Proprietà:

(1) $\dfrac{(fg)'}{fg} = \dfrac{f'}{f} + \dfrac{g'}{g}$

(2) $\dfrac{(1/f)'}{(1/f)} = -\dfrac{f'}{f}$

(3) $\dfrac{(f^k)'}{f^k} = k\dfrac{f'}{f}$

es.

(4) $\left\{ \text{singolarità di } \dfrac{f'}{f} \right\} = \{ \text{zeri di } f \} \cup \{ \text{poli di } f \}$

Inoltre le singolarità di $\frac{f'}{f}$ sono tutte poli semplici con

$$\text{Residuo} = \begin{cases} \text{ordine dello zero} = \text{molt. dello zero} \\ \text{ordine del polo} = -\text{molt. del polo} \end{cases}$$

dim

(4) $f(z) = (z-z_0)^n g(z)$, $n \in \mathbb{Z}$, con g olomorfa in z_0

e $g(z_0) \neq 0$.

Usando le regole precedenti,

$$\frac{f'}{f} = \frac{((z-z_0)^n)'}{(z-z_0)^n} + \frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{n}{(z-z_0)} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

→ olomorfa in z_0

Quindi $\frac{f'}{f}$ ha un polo semplice in z_0 e il suo residuo è l'ordine dello zero/polo di f in z_0.

Teorema [Principio dell'argomento]

Sia $f \in \mathcal{M}(U)$ e sia γ un ciclo in U t.c.

- γ e' omologo a 0 in U;
- γ non passa per gli zeri ne per i poli di f

Allora $$\int_\gamma \frac{f'}{f} = 2\pi i \sum_{z \in Z(f) \cup P(f)} W(\gamma, z) \cdot \mathrm{ord}_z(f)$$

dim T. Residui + proprietà di $\frac{f'}{f}$. ∎

OSS. Se esiste il logaritmo in una regione aperta che contiene γ, $\int_\gamma \frac{f'}{f} = \int_\gamma (\log f)' = \log(f(\gamma(b))) - \log(f(\gamma(0))) =$

$\log z = \log|z| + i \arg(z)$

$= i$ (cambio di argomento di log lungo γ).

Def Una curva chiusa si dice <u>semplice</u> se non si autointerseca, i.e., $\exists$ par. iniettiva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ (e $\gamma(a) = \gamma(b)$).

<u>Fatto</u> (Jordan) Data γ una curva chiusa semplice, γ^c e' fatto da due componenti connesse:

- una limitata : $W(\gamma, -) = \pm 1$ (chiamata interno)
- una illimitata : $W(\gamma, -) = 0$ (chiamata esterno).

<u>Corollario</u> Sia $f \in \mathcal{M}(U)$ e γ <u>una</u> curva chiusa semplice orientata positivamente in U, con $\overline{\text{int}(\gamma)} \subset U$ e t.c. nessun polo o zero di f appartiene a γ. Allora

$$\int_\gamma \frac{f'}{f} = 2\pi i \left(\underset{\text{contati con molteplicità}}{\#\text{ zeri di } f \text{ in } \text{int}(\gamma)} - \underset{\text{contati con molteplicità}}{\#\text{ poli di } f \text{ in } \text{int}(\gamma)} \right)$$

<u>dim</u> $\text{int}(\gamma) = \{ z \in \gamma^c : w(\gamma, z) \neq 0 \}$

$= \{ z \in \gamma^c : w(\gamma, z) = 1 \}$

Quindi, siccome $\text{int}(\gamma) \subset U$, γ e' omologo a 0 in U.

Possiamo quindi applicare il teorema per avere che

$$\int_\gamma \frac{f'}{f} = 2\pi i \sum_{\substack{z \in Z(f) \cup P(f) \\ \cap \, \text{int}(\gamma)}} \text{ord}_z(f) =$$

$$= 2\pi i \left(\sum_{z \in Z(f) \cap \text{Int}(\gamma)} \text{mult}_z(f) - \sum_{z \in P(f) \cap \text{Int}(\gamma)} \text{mult}_z(f) \right)$$

$= 2\pi i$ (# zeri di f in $\text{int}(\gamma)$ − # poli di f in $\text{int}(\gamma)$)

contati con molteplicità. ∎

Corollario/Es: Il teorema Fondamentale dell'Algebra si può dimostrare facilmente usando il Principio dell'argomento

Infatti, sia $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ pol. di grado $n > 0$

Sia $R >> 0$ t.c. tutti gli zeri di P sono contenuti in $D_R(0)$. Allora abbiamo

- $$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_R(0)} \frac{P'(z)}{P(z)} \, dz = \# \left\{ \begin{array}{c} \text{Radici di } P \\ \text{contate con molteplicità} \end{array} \right\}$$
- $$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_R(0)} \frac{n}{z} = n$$
- $$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_R(0)} \left[\frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{n}{z} \right] dz \right| \longrightarrow 0$$

Teorema [Rouché] Sia γ una curva chiusa semplice e piano f, g olomorfe su $\mathrm{Int}(\gamma) \cup \gamma$ e t.c.

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|, \quad \forall z \in \gamma.$$

Allora f e g hanno lo stesso numero di zeri in $\mathrm{Int}(\gamma)$ (contati con molteplicità).

dim

Osserviamo che l'ipotesi implica che né f né g possono avere zeri su γ e che $\left|\frac{g(z)}{f(z)} - 1\right| < 1$, per $z \in \gamma$.

Quindi l'immagine di γ via $\frac{g}{f}$, ossia $\overbrace{\frac{g}{f}}^{\text{"}F\text{"}} \circ \gamma$ è una curva chiusa contenuta in $D_1(1)$.

Quindi $W(F\circ\gamma, 0) = 0$

$$\Rightarrow 0 = W(F\circ\gamma, 0) = \int_{F\circ\gamma} \frac{1}{z}\,dz =$$

$F\circ\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$

$$= \int_a^b \frac{F'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)}{F(\gamma(t))}\,dt =$$

$$= \int_\gamma \frac{F'}{F}\,dz \underset{F=\frac{g}{f}=g\cdot\frac{1}{f}}{=} \int_\gamma \frac{g'}{g} - \int_\gamma \frac{f'}{f}$$

$$= \#\{\text{zeri di } g \text{ in } \mathrm{int}(\gamma)\} - \#\{\text{zeri di } f \text{ in } \mathrm{int}(\gamma)\}$$

$\blacksquare$

<u>Esempio</u> Sia $P(z) = z^8 - 5z^3 + z - 2$

⇝ Quante radici ha P (contate con molteplicità) in $D_1(1)$?

Consideriamo $f(z) = -5z^3$

Allora $|f(z) - P(z)| = |-z^8 - z + 2| \underset{|z|=1}{<} |-5z^3| = 5$

$\overset{\text{Rouché}}{\Longrightarrow}$ f e P hanno lo stesso numero di zeri su $D_1(1)$,

e quindi 3 (perché contati con molteplicità).

Applicazione: TFA

Sia $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$, con $a_n \neq 0$ e $n \geq 1$.

Sia $R >> 0$ t.c. $|a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1}| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| R^k \underset{R>>0}{<} |a_n| R^n$

$= |a_n z^n|$, per $|z| = R$

$\underset{\text{Rouché}}{\Longrightarrow}$ $P(z)$ e $a_n z^n$ hanno lo stesso numero di zeri in $D_R(0)$, (contati con molteplicità)

$\Longrightarrow$ $P(z)$ ha n radici. $\blacksquare$