Riassunto AC 310 - 08/05/2020

- Piano complesso
  - proprietà n: complessi
  - forma polare

- Funzioni di variabile complessa
  - continuità
  - differenziabilità : $f: U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

    $x+iy \longmapsto u(x,y) + i v(x,y)$

  è olomorfa se u e v soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann.

- Serie di potenze formali
  - $\mathbb{C}[[T]] = \{ \sum a_n T^n, a_n \in \mathbb{C} \}$
    - come $\mathbb{C}$-algebra
    - come spazio funzionale
- Serie di potenze convergenti.

- funzioni complesse e il loro sviluppo in serie di potenze.

Teorema [Abel] Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie di potenze.

Allora $\exists\, R : 0 \le R \le \infty$ detto raggio di convergenza :

i) La serie converge assolutamente per ogni $z : |z| < R$.

Dato $0 \le \rho < R$, la convergenza è uniforme per $|z| \le \rho$

(ii) Se $|z| > R$ la serie è divergente.

(iii) Se $|z| < R$, la somma della serie è una funzione olomorfa. La sua derivata si può ottenere derivando la serie termine a termine, e la serie derivata ha lo stesso raggio di convergenza.

Inoltre $\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ (F. Hadamard).

$\rightarrow$ stesso risultato vale per lo sviluppo in un altro punto $z_0 \in U$.

$\rightarrow$ Se $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-z_0)^n$, $|z-z_0|<R$,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

- Funzione analitiche in $U \subset \mathbb{C}$ ($\Rightarrow$ olomorfe)

esempi:
- polinomi
- esponenziale
- trigonometriche
- Binomiale
- "logaritmo"

- Proprietà locali di funzioni analitiche
  - isomorfismo analitico (locale)

f analitica in z_0, allora $\exists\, \varphi$ cambio di coordinate t.c.
(i.e. iso analitico e $\varphi(0)=0$)

$$f(z) = f(z_0) + \varphi(z-z_0)^m \quad , \quad \text{in un intorno di } z_0,$$

dove $m = \operatorname{ord}_{z_0}(f(z)-f(z_0))$.

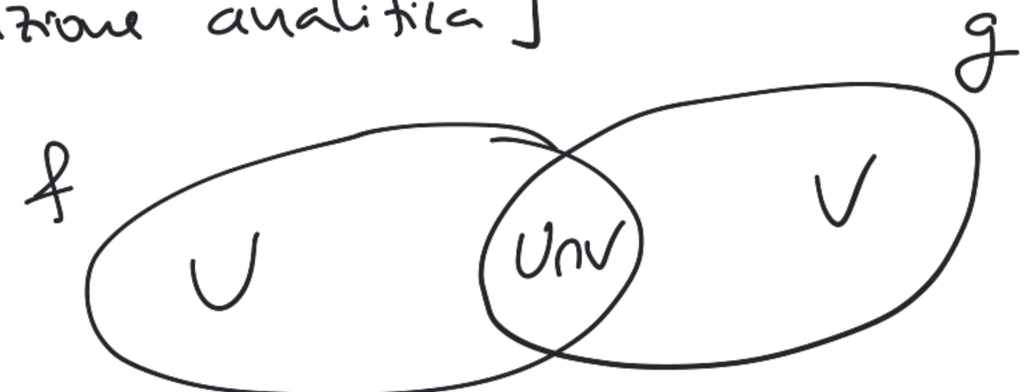
- f loc. inv. in z_0 se $f'(z_0) \neq 0$.
- T. funzione aperta (funzione analitica non loc. costante è aperta)
- Principio del massimo modulo locale

$\Rightarrow$ T. F. A.

- funzioni analitiche in aperti connessi
  - una funzione analitica non costante in un aperto connesso ha zeri discreti

↳ [Unicità della continuazione analitica]

f, g analitiche in U, V, risp., $f_{|U\cap V} = g_{|U\cap V}$



$\Rightarrow$ g è l'unica cont. analitica di f a V.

- $f : U \to \mathbb{C}$, U aperto connesso.
  f loc. costante in z_0 $\Rightarrow$ f costante in U.

- Principio del Massimo Modulo Globale
  ↳ $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ analitica. Se $|f|$ ha un massimo in $z_0 \in \overline{U}$ $\Rightarrow$ $z_0 \in \partial \overline{U}$.

Integrali

$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ $\quad C^1$ (a tratti)

$t \longmapsto \gamma(t)$

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt$$

- Criterio di esistenza di una primitiva:

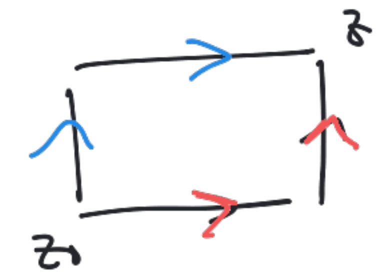
$f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ continua, U aperto connesso

$\exists\, g : g' = f$ sse $\int_\gamma f = 0$, $\forall \gamma$ cammino chiuso in U.

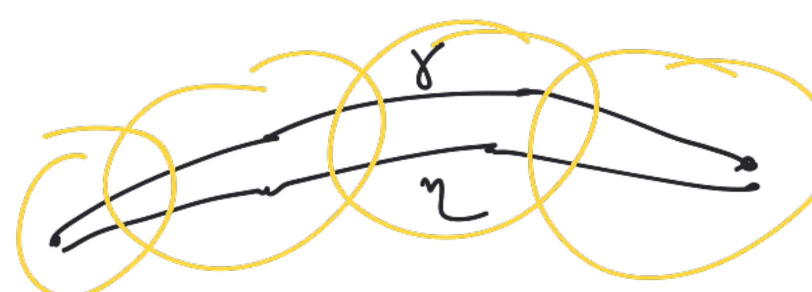
↳ in questo caso $\forall\, \eta : [a,b] \longrightarrow U$,

$$\int_\eta f = g(\eta(b)) - g(\eta(a)).$$

- <u>Primitiva locale</u> di una funzione olomorfa.

  - Teorema Goursat: f olomorfa in un rettangolo R, allora
    $$\int_{\partial R} f = 0$$
    $\Downarrow$
    $f : D_r(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, allora
    $$g(z) := \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz \quad \text{lungo i bordi di}$$
    
    è olomorfa e $g' = f$.

- Integrale di una funzione olomorfa lungo un cammino continuo $\rightsquigarrow$ usando la nozione di cammino vicino.



γ e η vicini in U
$$\Rightarrow \int_\gamma f = \int_\eta f$$

- Forma omotopica del T. Cauchy

$f: U \to \mathbb{C}$ olomorfa e γ e γ' omotopi in U

$$\Rightarrow \int_\gamma f = \int_{\gamma'} f$$

$\Rightarrow$ $f: U \to \mathbb{C}$ olomorfa e U semplicemente connesso

$\Rightarrow$ f ammette una primitiva

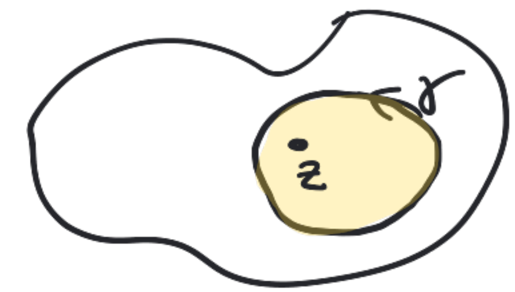
$$g(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi$$

- Definizione di logaritmo come primitiva adeguata di $f(z) = \frac{1}{z}$

- **Formula integrale (locale) di Cauchy**

$f : U \to \mathbb{C}$ olomorfa e $D_R(z_0) \subset \overline{D_R(z_0)} \subset U$

$\gamma = \partial \overline{D}$.



$\Rightarrow \forall z \in D$, $\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi}$

$\Rightarrow \forall z \in D_R(z_0)$, $f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$,

con $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$

$\Rightarrow$ f è analitica in $D_R(z_0)$.

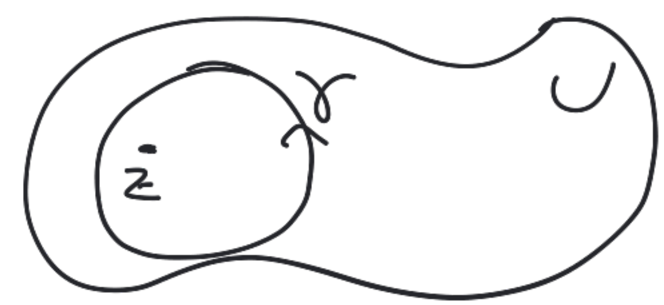
- T. <u>Liouville</u>: f intera e limitata $\Rightarrow$ f costante

  $\leadsto$ T.F.A.

- T. <u>Morera</u>: $f: U \to \mathbb{C}$ continua e U aperto.

  Se $\int_R f = 0$, $\forall R$ rettangolo contenuto in U $\Rightarrow$ f olomorfa

- T. Cauchy per le derivate (cond. di F.L.C)



$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} n! \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

- Data $g: U \to \mathbb{C}$ continua e γ C^1 a tratti in U,

$$f: U \setminus \gamma \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \int_\gamma \frac{g(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

è olomorfa e

$$f^{(n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

Formula Globale di Cauchy

- Nozione di $W(\gamma, z)$, γ catena (chiusa) e $z \in U$
  - nozione di curve omologhe in U (se $W(\gamma, z) = W(\eta, z)$, $\forall z \notin U$)
    ↳ curva omologa a 0 in U.

F. G. C. Se γ e' (catena chiusa) omologa a 0 in U e $f: U \to \mathbb{C}$ olomorfa

allora, $\forall z_0 \in U \setminus \gamma$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz = W(\gamma, z_0) \, f(z_0)$$

$\Longrightarrow$ T. Cauchy Se γ e η sono catene chiuse omologhe in U, allora $\int_\gamma f = \int_\eta f$, f olomorfa in U.

Da fare:
- Serie di Laurent
- Singolarità e funzioni meromorfe
- Teorema dei residui
- Classificazione degli aperti connessi di $\mathbb{C}$ a meno di biolomorfismo
  - Trasformazioni lineari fratte
    - $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$
    - $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$
- Funzioni analitiche globali (Logaritmo, radici)
- Fascio (di germi) di funzioni analitiche e cenni di Superficie di Riemann