Relazioni tra serie di potenze formali e serie di potenze convergenti

– Lang, II, § 3.

- Somme e prodotti

Teorema Siano f e $g \in \mathbb{C}[[T]]$ serie assol. convergenti in un disco $D(0,R)$! $R>0$ Allora $f+g$ e $f \cdot g$ $\in \mathbb{C}[[T]]$ sono anche loro assol. convergenti in questo disco e, dato $\alpha \in \mathbb{C}$, αf è assol. conv. in questo disco. Inoltre,

$$\begin{cases} (f+g)(z) = f(z)+g(z) \\ (f\,g)(z) = f(z)\,g(z) \\ (\alpha f)(z) = \alpha \cdot f(z) \end{cases}, \forall z \in D(0,R).$$

dim Vedere Lang, pag 61. per il prodotto (vedere esercitazione 3)

Esercizio (?) negli altri casi.

OSS. Se $f \in \mathbb{C}[[T]]$ ha raggio di convergenza $R>0$ diremo che f è una serie di potenze convergente.

$\boxed{D}$. Sia $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ in D. intorno di 0.
$\rightarrow$ serie conv. per $f(z)$ in D.

$\rightarrow$ $\boxed{\text{Lo sviluppo in serie è unico?}}$

Più precisamente:

Siano $f, g \in \mathbb{C}[[T]]$ convergenti in un intorno D di 0 per la stessa funzione, ossia, t.c. $f(z) = g(z)$, $\forall z \in D$.

$\rightsquigarrow$ E' vero che $\boxed{f = g \text{ in } \mathbb{C}[[T]]}$?

Equivalentemente, se $f \in \mathbb{C}[[T]]$ è conv. in D e $f(z) = 0$, $\forall z \in D$, è vero che $\boxed{f = 0}$ in $\mathbb{C}[[T]]$?
$(\Longleftrightarrow) f = \sum a_n T^n$, $a_n = 0$, $\forall n \geq 0$.

$\rightarrow$ Vedremo che infatti è vero pure di più!

Teorema (3.2 di Lang).

a) Sia $f(T) = \sum a_n T^n \in \mathbb{C}[[T]]$ una serie non costante (i.e., t.c. $\exists\, i > 0 : a_i \neq 0$) con raggio di conv. $R > 0$

Se $f(0) = 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0 : f(z) \neq 0$, $\forall z : 0 < |z| < \delta$.

b) Se $f(T) = \sum_{n \geq 0} a_n T^n$ e $g(T) = \sum_{n \geq 0} b_n T^n$ sono convergenti e se $f(z) = g(z)$, $\forall z \in S$, dove S è un insieme avendo 0 come punto di accumulazione, allora

$$f(T) = g(T) \in \mathbb{C}[[T]] \quad (\text{cioè, } a_n = b_n,\ \forall n).$$

<u>dim</u> a) Sia $f(T) = a_m T^m +$ termini di ordine sup, $a_m \neq 0$

ord$(f) = m \geq 1$. ($f(0)=0$)

$= a_m T^m \left(1 + h(T)\right)$,

con $h(T) \in \mathbb{C}[[T]]$ serie convergente (esercizio!)

e.g. F. Hadamard

con $\operatorname{ord}(h) \geq 1$.

$\Updownarrow$

$h(0) = 0$.

Essendo $h(z)$ la somma di una serie di potenze convergente, e' continua in un intorno di 0

Siccome $h(0)=0$, $\boxed{1+h(0) = 1}$

$\Rightarrow \exists\, s>0 : \forall z : |z| < s$, $1+h(z) \neq 0$

$\Rightarrow \forall z : 0<|z|<s$, $f(z) = \underbrace{\boxed{\underbrace{a_m z^m}_{\neq 0} \underbrace{(1+h(z))}_{\neq 0}} \neq 0}$.

b) E' una conseguenza di a):

$\Rightarrow \exists\, \rho>0 : \forall z : |z|<\rho, \quad 1+h(z)\neq 0$

$\Rightarrow \forall z : 0<|z|<\rho, \quad f(z) = \underbrace{\underbrace{a_m z^m}_{\neq 0}\underbrace{(1+h(z))}_{\neq 0}}\neq 0.$

b)

E' una conseguenza di a):

Se $h(T) = f(T) - g(T) \in \mathbb{C}[[T]]$, abbiamo che $h(0)=0$ (perché, per continuità, $f(0)=g(0)$).

a) $\Rightarrow$ $h(T) = 0 \in \mathbb{C}[[T]] \iff f(T) = g(T) \in \mathbb{C}[[T]]$.

$h(z)=0, \forall z\in S$, con $0\in S'$ $\Rightarrow \nexists\, \rho>0 : 0<|z|<\rho,\ f(z)\neq 0$

$\left(f(z) = \sum a_n z^n\right), \quad \left(g(z) = \sum b_n z^n\right)$

Esempio Funzione esponenziale / Serie esponenziale

Ric. che abbiamo definito, $\forall z \in \mathbb{C}$

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x} \cdot e^{iy} = \boxed{e^{x}(\cos y + i \operatorname{sen} y)}$$

e

$$\exp(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

→ entrambe definiscono funzione complesse continue definite in $\mathbb{C}$ che estendono e^{x}, $\forall x \in \mathbb{R}$.

→ Vediamo che sono uguali.

- Infatti, dal T. 3.2,
  - $\exists!$ serie di potenze $\exp(z)$ che estende e^{x}, $x \in \mathbb{R}$.
- Inoltre, $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta = \exp(i\theta)$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$

perché $\exp(iz) = \sum \frac{(iz)^n}{n!} = \boxed{C(z) + i\, S(z)}$, dove

$\Rightarrow$ Vediamo che sono uguali.

- Infatti, dal T. 3.2,
  - $\exists!$ serie di potenze $\exp(z)$ che estende e^x, $x \in \mathbb{R}$.

- Inoltre, $e^{i\theta} = \cos\theta + i \,\mathrm{sen}\,\theta = \exp(i\theta)$, $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$

perché $\exp(iz) = \sum_{n\geq 0} \frac{(iz)^n}{n!} = \underbrace{\boxed{C(z) + i\, S(z)}}_{\text{serie di potenze}}$, dove

$$C(z) = \underbrace{\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}}_{\cos(z)} \quad e \quad S(z) = \underbrace{\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\mathrm{sen}(z)}$$

$\exp(i\theta) = C(\theta) + i\, S(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$
$= \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)$

- Infine, $\boxed{\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)}$, $\forall\, z, w \in \mathbb{C}$

(esercizio) $\leftarrow$ (vero anche per $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$)

$$\Longrightarrow \exp(x+iy) = \exp(x)\,\exp(iy) = e^x\, e^{iy}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$$\therefore \boxed{\exp(z) = e^z, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.}$$

OSS. Analogamente,

- $\exists!$ serie di potenze che estende $\cos x$

$$\boxed{C(z) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}} \quad - \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

- $\exists!$ serie di potenze che estende $\sin x$

$$\boxed{S(z) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}} \quad - \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Esempio Usando il Teorema 3.2 possiamo anche concludere che

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \ \sin^2 z + \cos^2 z = 1.}$$

Infatti, per le serie $C(z)$ e $S(z)$ sopra, sappiamo che

$\to$ $C^2(z) + S^2(z)$ è una serie di potenze convergente $\in \mathbb{C}[[T]]$

$\to$ e $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{C^2(x) + S^2(x) = 1}$

$$\Longrightarrow \boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \ C^2(z) + S^2(z) = 1}$$

perché 1 è una serie di potenze che ha questa proprietà e, usando l'unicità, concludiamo.

Esempio Stesso ragionamento vale per la serie

$\boxed{\text{binomiale}}$

$$\underbrace{(1+z)^{\alpha} = B_{\alpha}(z) = \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} z^n} \quad , \alpha \in \mathbb{C}$$

$\rightarrow$ Se $\alpha = \frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}$, $B_{\alpha}(z)$ è ass. conv. per $|z|<1$

è serie convergente

Siccome per $\underset{\sim\sim\sim}{x \in \mathbb{R}}$,

$$\left[(1+x)^{\frac{1}{m}} = \underbrace{B_{\frac{1}{m}}(x)} \right. \quad \text{è tale che}$$

$$\boxed{\left(B_{\frac{1}{m}}(x) \right)^m = 1+x}$$

$B_{\frac{1}{m}}(T)$ e $1+T$ coincidono su $]-1,1[$

$$\Longrightarrow \left(B_{\frac{1}{m}}(z) \right)^m = 1+z, \quad \forall z : |z|<1.$$

e $\left(B_{\frac{1}{m}}(T) \right)^m = 1+T \quad \in \mathbb{C}[[T]]$.

$\rightarrow$ OSS Nell'es. del foglio da consegnare $\alpha \in \mathbb{C}$

Teorema (3.3) Sia $f(T) = \sum_{n \geq 0} a_n T^n$ invertibile in $\mathbb{C}[[T]]$ e convergente e sia $g(T) = \sum_{n \geq 0} b_n T^n$ una inversa formale di f, i.e. $fg = 1$.

$\Longrightarrow$ g ha raggio di conv. positivo

dim vedere Lang, pag 65.

Teorema 3.4 Siano $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ e $h(z) = \sum_{n \geq 1} b_n z^n$ serie convergenti e t.c. $\boxed{\mathrm{ord}(h) \geq 1}$

Supp. che
- f converge assol. per $|z| \leq R$, con $R > 0$
- $s > 0$ è t.c. $\sum |b_n| s^n \leq R$

$h(0) = 0$
h è continua in un intorno di 0

$\Longrightarrow$ $\boxed{g = f(h)} = \sum_{n \geq 0} a_n \Big(\underbrace{\sum_{k \geq 1} b_k T^k}_{|\ \ | \leq R} \Big)^n$ è assol. conv. per $\boxed{|z| \leq s}$,

e, se z è t.c. $|z| \leq s$, $\boxed{g(z) = f(h(z))}$.

dim vedere Lang, pag 66.

Esempi 1) Dati $m \in \mathbb{N}$ e $h(z)$ serie conv. di ord$(h) \geq 1$,

è possibile definire $\left[B_{\frac{1}{m}}(h(z)) = (1+h(z))^{1/m}\right.$, composta di $B_{\frac{1}{m}}$ con $h(z)$

che è una serie convergente t.c. $\left((1+h(z))^{1/m}\right)^m = 1 + h(z)$.

$\hookrightarrow$ $B_{\frac{1}{m}}(h(z))$ avrà senso se z è t.c. $|z| < r$, dove

$r > 0$ è t.c se $|z| < r$, $|h(z)| < 1$.

$\boxed{2)}$ Sia $f(w) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{w^n}{n}$, $w \in \mathbb{C}$. f è assol. conv. se $|w| < 1$

e se $\boxed{x \in \mathbb{R}}$ $f(x) = \log(1+x)$ $(x \in \mathbb{R}_{>-1})$.

estende $\log(1+x)$

Definiamo $\boxed{\log z} := f(z-1) = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}}$, $|z-1| < 1$

Allora $\boxed{\exp(\log(z)) = z.}$