Serie di Laurent (Lang, V, §2)

Def Una serie di Laurent è una serie

parte principale — parte regolare

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n = \underbrace{\sum_{n<0} a_n z^n}_{f^-(z)} + \underbrace{\sum_{n\geq 0} a_n z^n}_{f^+(z)}$$

Sia $A \subseteq \mathbb{C}$.

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ si dice convergente (unif. convergente) in A

se entrambe $f^+(z)$ e $f^-(z)$ convergono (conv. uniformemente)

in A.

In questo caso, $f(z) = f^+(z) + f^-(z)$ in A.

- La parte regolare della serie
  $f^{+}(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ e' una serie di potenze, sia R
  il suo raggio di convergenza, $\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

- La parte principale della serie
  $f^{-}(z) = \sum_{n<0} a_n z^n$ non lo è, ma invece

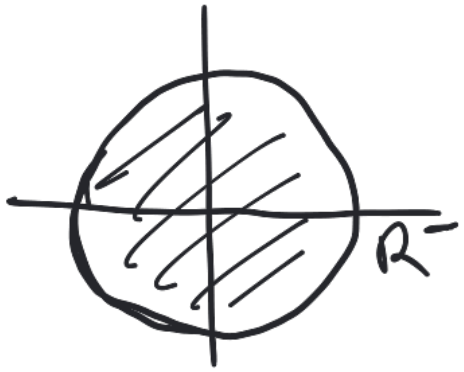
$$f^{-}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n<0} a_n \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n>0} a_{-n} z^n$$ e' una

serie di potenze, sia R^{-} il suo raggio di convergenza.

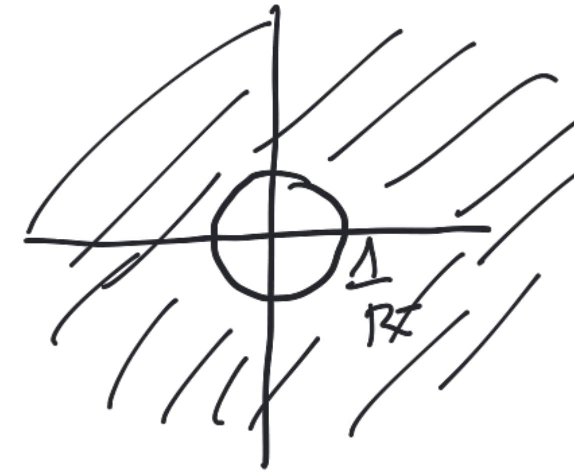
$$\frac{1}{R^{-}} = \limsup_{n \to -\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Quindi

$$f^-\left(\frac{1}{z}\right) \text{ è conv. su } D_{R^-}(0)$$



$\Longrightarrow$ $f^-(z)$ è conv. su $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{1}{R^-}\}$



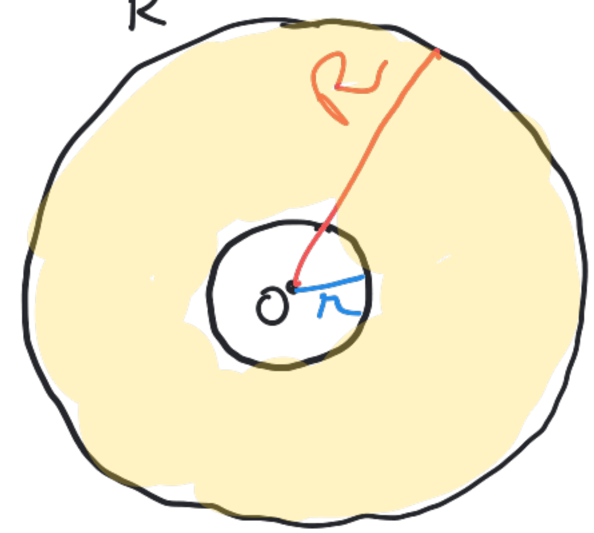
<u>Quindi</u>:

- $f^+(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ definisce una funzione olomorfa su $D_R(0)$.

- $f^-(z) = \sum_{n<0} a_n z^n$ definisce una funzione olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \overline{D_r(0)}$, dove $r := \frac{1}{R^-}$.

$\Longrightarrow$ Se $\boxed{r < R}$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ definisce una funzione olomorfa sulla corona circolare

$$\boxed{A = A_{R/r}(0) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}}$$



Teorema (1) Sia $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ una serie di Laurent con raggi di convergenza r e R, i.e., $\begin{cases} \sum_{n\geq 0} a_n z^n \text{ ha raggio conv } R \\ \sum_{n<0} a_n \left(\frac{1}{z}\right)^n \text{ ha raggio di conv. } \frac{1}{r} \end{cases}$

Allora:

- $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ e' una funzione olomorfa in $A_{R/r}(0)$,
- In $\mathbb{C} \setminus \overline{A_{R/r}(0)}$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ non converge.
- nel bordo $\partial \overline{A_{R/r}(0)}$ non si sa (ma c'e' almeno un punto di non convergenza in C_R e C_r).
- la serie converge uniformemente in $A_{R-\varepsilon/r+\varepsilon}$, $\forall \varepsilon << 1$

($\Rightarrow$ serie converge uniformemente sui compatti di $A_{R/r}(0)$

$\Rightarrow$ la serie può essere derivata e integrata termine a termine.)

- i coefficienti sono uguali a

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}\, d\xi \,, \text{ per } r < \rho < R.$$

(2) Viceversa, se f è olomorfa nella corona circolare $A_{R/r}(0)$, allora f ammette uno sviluppo in serie di Laurent $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ in $A_{R/r}(0)$.

— " ——— " ——— ". ———

<u>oss</u>. Tutti gli enunciati del teorema valgono naturalmente per sviluppi in altri punti $z_0 \in \mathbb{C}$, e a quel punto la corona circolare di convergenza sarà $A_{R/r}(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} : r \lneq |z - z_0| \lneq R \}$.

Corollario:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{serie di Laurent}\\ \text{convergenti in } A_{R/r}\end{array}\right\} \longleftrightarrow \mathcal{H}(A_{R/r})$$

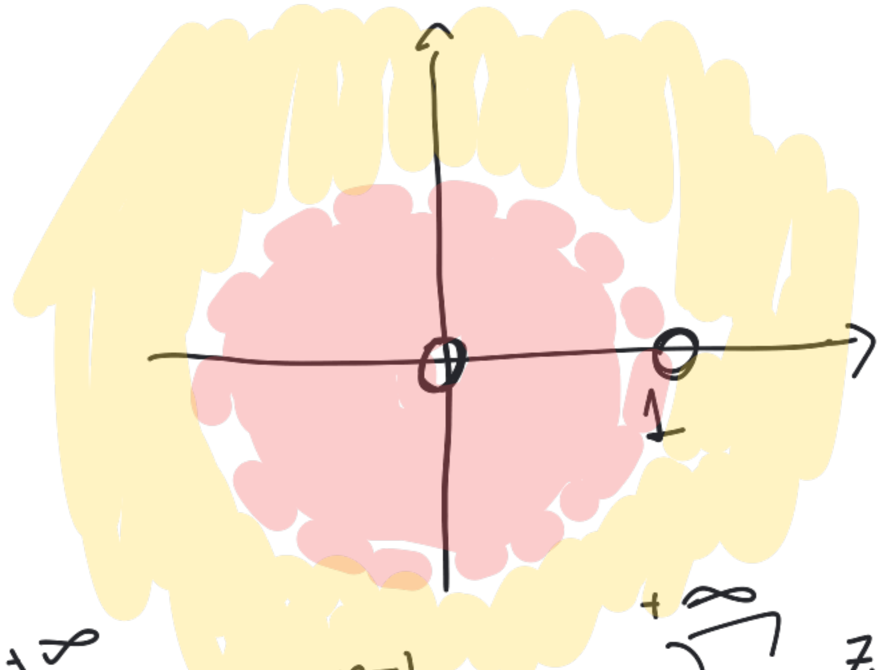
$$\cup \qquad\qquad\qquad\qquad \cup$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{serie } \cancel{\text{di potenze}} \text{ convergenti}\\ \text{in } D_R(0)\end{array}\right\} \longleftrightarrow \mathcal{H}(D_R(0))$$

Esempi $f(z) = \frac{1}{z^n}$, $n>0$ è olomorfa in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ e coincide con il suo sviluppo in serie di Laurent.

Infatti, $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = z^n$ è intera, quindi $f(z) = \frac{1}{z^n}$ converge su $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

- $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$



$$\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\cdot\frac{-1}{1-z} =$$

$$= \frac{1}{z}\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)\, z^n}_{\text{conv. se } |z|<1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)\, z^{n-1} = -\sum_{n=-1}^{+\infty} z^n$$

Quindi $f(z) = -\sum_{n=-1}^{+\infty} z^n$ se $z \in \boxed{D_1(0)\setminus\{0\}}$
$= \{z\in\mathbb{C} : 0<|z|<1\}$.

Invece se consideriamo $A_{\infty,1}(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z|>1\}$,
essendo f olomorfa, dovrà ammettere anche lì uno sviluppo in serie di potenze.

Per trovarlo e' conveniente considerare

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n, \quad \left|\frac{1}{z}\right| < 1.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+2}, \quad |z|>1.$$

$$= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots, \quad |z| > 1$$

- A volte potrebbe essere utile utilizzare la decomposizione della funzione in frazioni irriducibili:

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$$ e proseguire con ciascun membro ...

<u>dim</u> (del teorema)

(I) I primi tre punti seguono perché $f^+(z)$ e $f^-\left(\frac{1}{z}\right)$ sono serie di potenze convergenti con raggi di conv. R e $\frac{1}{r}$.

Ultimo punto:

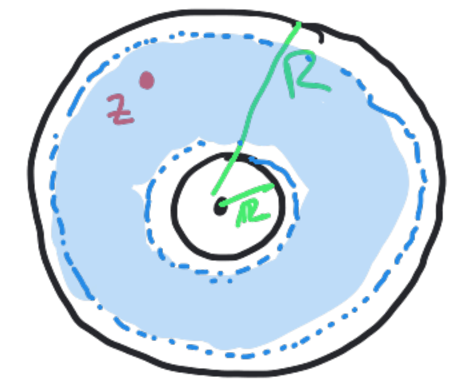
Dato ρ: $r < \rho < R$, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$, $z \in C_\rho$.

Quindi
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \xi^m}{\xi^{n+1}}\, d\xi =$$

$$\overset{\text{conv. uniforme}}{=} \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \underbrace{\int_{C_\rho} \xi^{m-n-1}\, d\xi}_{= \begin{cases} 0 & \text{se } m-n-1 \neq -1 \\ 2\pi i & \text{se } m-n-1 = -1 \iff m = n \end{cases}} = \frac{1}{2\pi i} a_n 2\pi i = a_n$$

(2) Sia $z \in A_{R/r}(0)$ e sia $\varepsilon > 0$ t.c. $z \in A_{R-\varepsilon/r+\varepsilon}(0)$.

Allora $C_{R-\varepsilon} - C_{r+\varepsilon}$ e' omologa a 0 in $A_{R/r}(0)$.



$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R-\varepsilon} - C_{r+\varepsilon}} \frac{f(w)}{w-z}\, dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R-\varepsilon}} \frac{f(w)}{w(1-\frac{z}{w})}\, dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r+\varepsilon}} \frac{f(w)}{-z(1-\frac{w}{z})}\, dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R-\varepsilon}} \frac{f(w)}{w} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z}{w}\right)^n dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r+\varepsilon}} \frac{f(w)}{-z} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{w}{z}\right)^n dw$$

Se $w \in C_{R-\varepsilon}$, $\left|\frac{z}{w}\right| < 1$ e se $w \in C_{r+\varepsilon}$, $\left|\frac{w}{z}\right| < 1$, quindi le serie sono unif. conv. in w, quindi possiamo integrare termine a termine:

Otteniamo quindi che, $\forall\, z \in A_{R-\varepsilon / r+\varepsilon}$,

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R-\varepsilon}} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\, dw \right) z^n + \underbrace{\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r+\varepsilon}} f(w) w^n \, dw \right) \frac{1}{z^{n+1}}}_{\Rightarrow\ -(n+1) = m}$$

$$= \sum_{m \leq -1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r+\varepsilon}} \frac{f(w)}{w^{m+1}}\, dw \right) z^m .$$

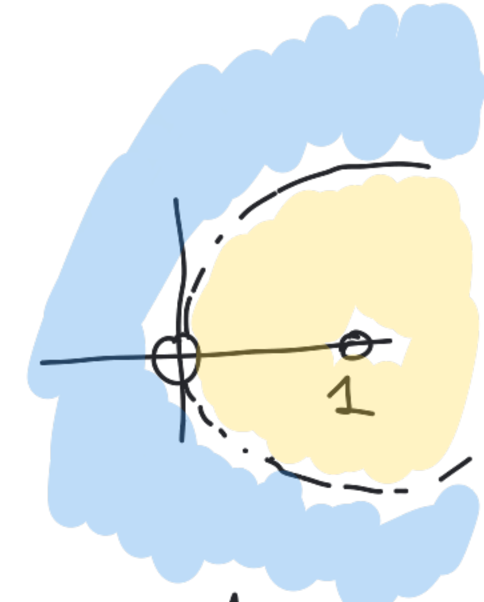
Otteniamo quindi che
f ammette uno sviluppo in serie di Laurent
in $A_{R/r}(0)$. ■

Esempi $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ è olomorfa in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Il suo sviluppo in serie di Laurent di f in 0

è $$f(z)=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!\,z^n}\,, \quad \forall z\neq 0.$$

$$=\sum_{m\leq 0}\frac{1}{(-m)!}z^{-m}$$



- Sviluppo di $f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}$ in $\boxed{z=1}$:

- in $D_1(1)\setminus\{1\}$ $\frac{1}{z}=\frac{1}{1+(z-1)}=\sum_{n\geq 0}(-1)^n(z-1)^n$, $|z-1|<1$.

  Sviluppo è $\frac{1}{z-1}+\sum_{n\geq 0}(-1)^n(z-1)^n$.

- esercizio: trovare lo sviluppo in $\boxed{\{z\in\mathbb{C}:\ |z-1|>1\}}$.