Singolarità isolate (Lang V, § 3)

Def Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ e $f: D_R(z_0) \setminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica (o olomorfa). Allora si dice che f ha una <u>singolarità</u> <u>isolata</u> in z_0.

<u>Oss.</u> Se f ha una singolarità isolata in z_0, allora f ammette una espansione in serie di Laurent

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n}$$

che vale su $D_R(z_0) \setminus \{z_0\}$

(perché $D_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ è una corona circolare centrata in z_0).

valida in una corona circolare

$$D = \{ z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < s \}, \quad \text{con } s \geq R.$$

Supponiamo quindi che f ha una singolarità isolata in z_0 e sia

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad z \in D_R(z_0) \setminus \{z_0\}.$$

Dobbiamo distinguere tra i seguenti 3 casi:

1. $a_n = 0, \ \forall n < 0$ (la parte principale dello sviluppo è nulla)

Allora f ha uno sviluppo in serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad z \in D_R(z_0) \setminus \{z_0\},$$

quindi f si può naturalmente estendere (in modo unico!) a una funzione olomorfa su z_0: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \ z \in D_R(z_0)$.

In questo caso diciamo che f ha una singolarità <u>rimuovibile</u> / <u>eliminabile</u> in z_0.

② $a_n = 0, \ \forall n \ll 0$, ossia $\exists\, m \in \mathbb{N}$:

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dots + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots \quad , \text{con } a_{-m} \neq 0.$$

In questo caso diciamo che f ha un <u>polo di ordine m</u> (o di molteplicità m) in z_0.

Diremo pure che f ha <u>ordine $-m$</u> in z_0:

<u>Def</u> L'<u>ordine di f</u> in z_0 è il più piccolo m nello sviluppo di f in serie di Laurent in z_0 t.c. $a_m \neq 0$; $\operatorname{ord}_{z_0}(f)$.

In questo caso vale la formula:

<u>Esercizio 1</u>: $\operatorname{ord}_{z_0}(f g) = \operatorname{ord}_{z_0}(f) + \operatorname{ord}_{z_0}(g)$

Un polo di ordine uno è anche detto <u>polo semplice</u>.

Esercizio 2 f ha un polo di ordine m in z_0 se

$g(z) = (z-z_0)^m f$ e' olomorfa in $D_R(z_0)$ e $g(z_0) = 0$.

③ f ha una singolarità essenziale se $a_n \neq 0$ per infiniti $n<0$

In questo caso, diciamo che $\mathrm{ord}_{z_0} f = \infty$

— " —

Esempi

① $$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \underset{\forall z \neq 0}{=} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k+1)!}$$

$\Rightarrow$ f ha una singolarità | rimuovibile / eliminabile in $z=0$.

② $f(z) = \frac{1}{z}$ ha un | polo di ordine 1 / polo semplice in $z=0$.

(3) $f(z) = \dfrac{z+2}{(z-1)^2 (z+2i)^3}$ ha | un polo di ordine 2 in $z=1$
| un polo di ordine 3 in $z=-2i$.

Più in generale, funzioni razionali (cioè, quozienti di polinomi) hanno solo poli come singolarità.

(4) $\sin z = z(1 + h(z))$, con $\mathrm{ord}_0 h(z) = 2$ (≥ 1)

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} \frac{1}{1+h(z)} = \frac{1}{z}\left(1 - h(z) + (h(z))^2 \ldots\right)$$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sin z}$ ha un polo di ordine 1 in $z=0$.

(5) $$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = \sum_{n\leq 0} \frac{1}{(-n)!} z^{-n}$$ ha una singolarità essenziale in $z=0$.

Def Una funzione f si dice **meromorfa** in z_0 se f ha una singolarità rimuovibile o un polo in $z = z_0$.

Se f è definita in un aperto U tranne che in un insieme discreto di punti, che sono singolarità rimuovibili o poli, f si dice **meromorfa in U**.

Esempio Se $P(z)$ e $Q(z)$ sono polinomi,

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$ è una funzione meromorfa in $\mathbb{C}$.

OSS Dall'esercizio sopra otteniamo che se f è meromorfa in z_0 allora è localmente quoziente di funzioni olomorfe in z_0.

<u>Abbiamo</u>

i) $\mathcal{H}(U)$: funzioni olomorfe in U
è un dominio

ii) $\mathcal{M}(U)$: funzioni meromorfe in U
è un campo

iii) $\mathcal{M}(U) = \operatorname{Quot} \mathcal{H}(U)$

$$\left(\begin{array}{ll} \subseteq & \text{facile} \\ = & \text{difficile} \end{array} \right)$$

Teorema [Caratterizzazione di singolarità isolate]

Sia $f: D_R(z_0) \setminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa

① [Riemann] f ha una singolarità rimuovibile in z_0

$\iff$ una delle seguenti è verificata:

(i) f ammette un'estenzione continua in $D_R(z_0)$;

(ii) $\exists \lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$

(iii) $\exists \lim_{z \to z_0} |f(z)| \in \mathbb{R}$

(iv) $\exists$ un intorno di z_0 dove f è limitata

(v) $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$

② f ha un polo in $z_0 \iff \lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$

③ f ha una singolarità essenziale in $z_0 \iff$ Casorati - - Weierstrass

$\forall$ intorno U di z_0, $f(U \setminus \{z_0\})$ è denso

<u>oss</u> (Picard) f ha una singolarità essenziale in z_0

$\Rightarrow \forall U$ intorno di z_0, $f(U \setminus \{z_0\}) = \begin{cases} \mathbb{C} \\ \mathbb{C} - \{y_0\} \end{cases}$

e $\forall w \in \mathrm{Im}\, f(U\setminus\{z_0\})$, $|f^{-1}(w)| = +\infty$.

<u>dim</u> (del teorema)

(1) Se f ha una singolarità rimuovibile in z_0, allora vale i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ iv) $\Rightarrow$ v)

Mostriamo che v) $\Rightarrow$ f ha una singolarità rimuovibile in z_0.

Sia $h(z) = \begin{cases} (z-z_0)^2 f(z) & \forall z \in D_R(z_0) \setminus \{z_0\} \\ 0 & \text{se } z = z_0 \end{cases}$

h è olomorfa in $D_R(z_0)\setminus\{z_0\}$ e

$$\lim_{z\to z_0} \frac{h(z)-\cancel{h(z_0)}^{\,0}}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z) \overset{\substack{\text{ipotesi}\\ \downarrow}}{=} 0$$

Dunque h è olomorfa in $D_R(z_0)$ e $h(z_0) = h'(z_0) = 0$

e quindi ammette uno sviluppo in serie di potenze di ordine ≥ 2:

$$h(z) = a_2 (z-z_0)^2 + a_3 (z-z_0)^3 + \cdots$$

$$\Longrightarrow f(z) = a_2 + a_3 (z-z_0) + \cdots, \quad \forall z \neq z_0$$

Quindi lo sviluppo di f in z_0 è di ordine ≥ 0,

e quindi la singolarità di f in z_0 è rimuovibile.

② Supp. che f ha un polo di ordine m in z_0, con $m \geq 1$.
Quindi $\exists$ $h(z)$ olomorfa in $D_R(z_0)$ e di ordine ≥ 1 t.c.

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^m} \quad \text{in } D_R(z_0) \setminus \{z_0\}.$$

$$\Longrightarrow \lim_{z \to z_0} |f(z)| = \lim_{z \to z_0} \frac{|h(z)|}{|(z-z_0)^m|} = +\infty$$

Il fatto che $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty \Rightarrow f$ ha un polo in z_0

e' una conseguenza di ③ :

infatti, ragionando per assurdo, si conclude che se invece z_0 fosse una singolarità essenziale, il limite non esisterebbe (e non sarebbe $+\infty$).

(3) Per assurdo, supp. che $\exists$ un intorno U di z_0 in $D_R(z_0)$ ed $\alpha \in \mathbb{C}$: $\alpha \notin \overline{f(U)}$ $\Leftrightarrow$ $\exists\, r > 0 : |f(z) - \alpha| > r, \forall z \in U$.

Sia
$$g : U - \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}^* \quad \text{olomorfa e limitata}$$
$$z \longmapsto \frac{1}{f(z) - \alpha}$$

$\Longrightarrow$ z_0 è una singolarità rimuovibile di g, cioè,
(1) g può estendersi a una funzione olomorfa in z_0.

$\Longrightarrow$
$$\frac{1}{g} : U - \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}^* \quad \text{è meromorfa in } z_0$$
$\mathcal{M}(U)$ è campo
$$z \longmapsto f(z) - \alpha$$

$\Longrightarrow$ f è meromorfa in z_0. $\not{D}$