# Proprietà geometriche locali II:

- Il Teorema della funzione inversa
- Il Teorema del Massimo modulo locale

Lang II.6
II.7

**Prop** [Forma canonica di una funzione analitica]

Sia $f$ una funzione analitica in $z_0$, con sviluppo

$$f(z) = a_0 + \sum_{n \geq m} a_n (z - z_0)^n, \quad a_m \neq 0$$

(cioè, $\mathrm{ord}(f - f(z_0)) = m$).

Allora, $\exists$ $\varphi$ isomorfismo analitico locale in $0$ t.c.

$$\boxed{f(z) = f(z_0) + (\varphi(z - z_0))^m.}$$

---

⇝ A meno di traslazioni e isom. analitico, una funzione analitica è localmente del tipo $\boxed{z \longmapsto z^m.}$

<u>dim</u> Il caso generale si riconduce facilmente tramite traslazioni a una situazione in cui

$$f(z) = \sum_{n \geq m} a_n z^n \quad , \; a_m \neq 0$$

$$= a_m z^m \, (\underbrace{1 + h(z)}) \quad , \qquad \text{con}$$

$$h(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \dots$$ convergente in un certo $D = D(0,r)$

($h(z)$ non ha termine costante)

Possiamo quindi applicare la serie binomiale:

$$\rightsquigarrow \quad \left[ (1 + h(z))^{1/m} =: 1 + H(z) \right]$$

Sia $a \in \mathbb{C}$: $\boxed{a^m = a_m}$. Allora possiamo scrivere

$f(z) = (a z (1 + H(z)))^m$ e $\left[ \varphi(z) = \overset{\neq 0}{a} z (1 + H(z)) \right]$ è isom. anal. locale in $z=0$ ■

Ric. Data $f: X \to Y$ funzione tra spazi topologici, $f$ si dice *aperta* se $\forall\, U \subset X$ aperto, $f(U) \subset Y$ è aperto.

Oss. Se $f: X \to Y$ è un'omeomorfismo locale, allora $f$ è un'applicazione aperta (poiché l'immagine di una base di intorni aperti è aperta).

Corollario Sia $f: U \to \mathbb{C}$ un isomorfismo analitico locale. Allora $f$ è un'applicazione aperta.

dim Basta osservare che se $f$ è un'isomorfismo analitico locale allora è un'omeomorfismo locale (una funzione analitica è continua). ▨

Esempio La mappa $\boxed{\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z^n \end{aligned}}$ è aperta.

Infatti, se $D$ è un disco aperto centrato nell'origine, $f(D)$ è un disco aperto centrato nell'origine.

$$f(D(0,R)) = D(0,R^n).$$

⚠ Non sarebbe vero per funzioni reali!

La funzione $\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$ manda $(-1,1)$ in $[0,1)$!

Teorema [della funzione aperta]

Sia $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ funzione analitica, $U \subset \mathbb{C}$ aperto, t.c. $f$ non è localmente costante nell'intorno di alcun punto di $U$, allora $f$ è aperta.

dim $\forall z_0 \in U$, possiamo scrivere localmente

$$\boxed{f(z) = f(z_0) + \left(\varphi(z-z_0)\right)^{m}}\,,$$ dove

$\varphi$ è un isomorfismo analitico locale e $m > 0$.

La conclusione segue perché:

- traslazioni sono aperte
- isom. anal. locale è aperta
- $z \longmapsto z^m$ è aperta

composizione di app. aperte è aperta

**Teorema** 6.4 (Criterio di invertibilità in un'insieme aperto).

Sia $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ analitica, $U \subset \mathbb{C}$ aperto, e supponiamo che $f$ sia iniettiva. Sia $V = f(U)$.

Allora $\boxed{f : U \longrightarrow V}$ e' un' isomorfismo analitico, e $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in U$.

**dim** ~~Essendolo~~ $f$ $f : U \longrightarrow V$ biettiva, $\exists g : V \longrightarrow U$ inversa di $f$ (come funzione)

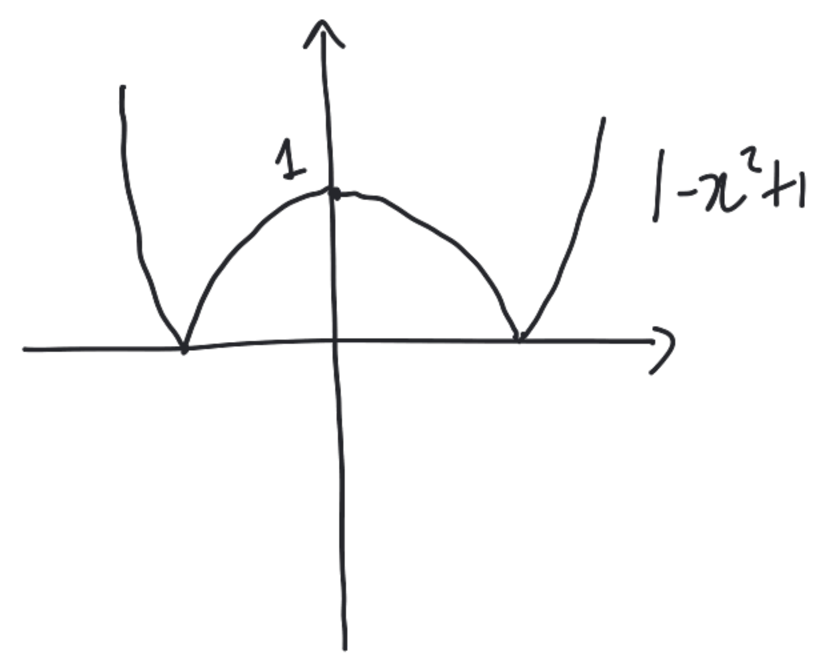
$\forall z_0 \in U$, $\boxed{f(z) = f(z_0) + (\varphi(z - z_0))^m}$, $\varphi$ iso. anal. locale

Ma essendo $f$ iniettiva, $\boxed{m = 1}$. ($z \mapsto z^m$ e' iniettiva sse $m = 1$)

Quindi $f$ e' un' isom. analitico locale e quindi l'inversa di $f$, che e' $g$, e' analitica in $f(z_0)$. ∎

**Teorema** [Principio del Massimo Modulo Locale]

Sia $f: U \to \mathbb{C}$ analitica, $U \subset \mathbb{C}$ aperto. Se esiste $z_0 \in U$ : $|f|: U \to \mathbb{R}$ abbia un massimo locale in $z_0$, allora $f$ è localmente costante in $z_0$.



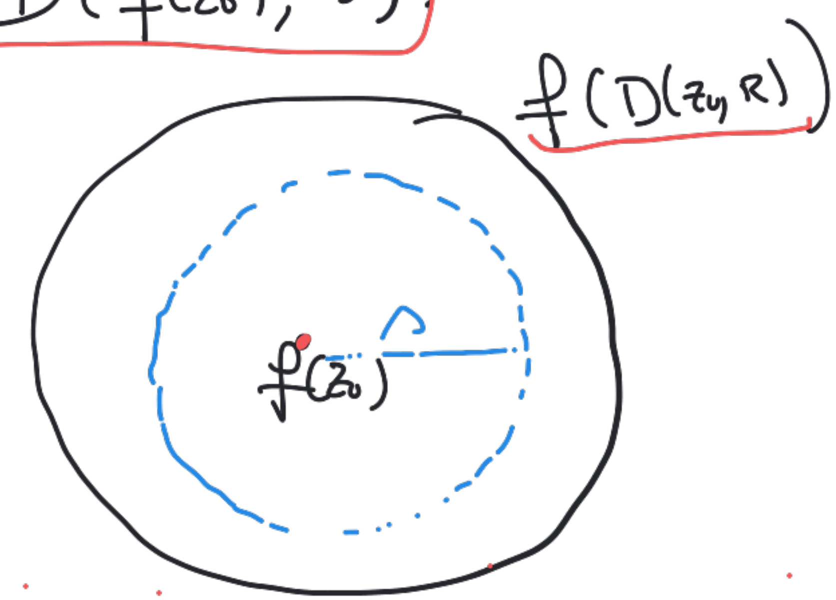

**Esempio** Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto -x^2+1$$

Allora $0$ è un massimizzante locale per $|f|$, ma $f$ non è localmente costante in $0$

__dim__. Supp., per assurdo, che $f$ non è localmente costante in $z_0$. Allora per il teorema della funzione aperta, $f$ è aperta in un intorno di $z_0$, $D(z_0,R)$.

Quindi $\boxed{\exists\, r>0 : f(D(z_0,R)) \supset D(f(z_0),r)}$.




Ha allora

$$|f(D(z_0,R))| \supset \left]\,|f(z_0)|-r,\ |f(z_0)|+r\,\right[$$

$$\Longrightarrow \exists\, z \in D(z_0,R) : |f(z)| > |f(z_0)|$$

Ma questa è una contraddizione con l'ipotesi.

Quindi $f$ è localmente costante in $z_0$. ∎

<u>Corollario</u> Sia $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ analitica, $U \subset \mathbb{C}$ aperto.
Se esiste $z_0 \in U$ : $Re(f)$ ha un massimo locale in $z_0$, allora $f$ e' localmente costante in $z_0$.

<u>dim</u> La funzione $\underbrace{e^{f(z)}}$ e' analitica e $\underbrace{|e^{f(z)}|} = \underbrace{e^{Re(f(z))}}$.
Quindi un massimo locale per $Re(f(z))$ e' massimo locale per $|e^{f(z)}|$, quindi $e^{f(z)}$ è loc. costante $\Rightarrow f(z)$ e' loc. costante.

**Teorema** [Teorema Fondamentale dell'Algebra]

Sia $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_d z^d$ un polinomio non costante ($a_d \neq 0$, $d > 0$) a coefficienti complessi. Allora $f$ possiede almeno una radice, cioè, $\exists\, z_0 : f(z_0) = 0$.

dim P.A., supponiamo che $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow$ $\boxed{\frac{1}{f} \text{ è analitica in } \mathbb{C}.}$

Scriviamo $f(z) = a_d z^d \left( \frac{a_0}{a_d z^d} + \frac{a_1 z}{a_d z^d} + \dots + 1 \right)$

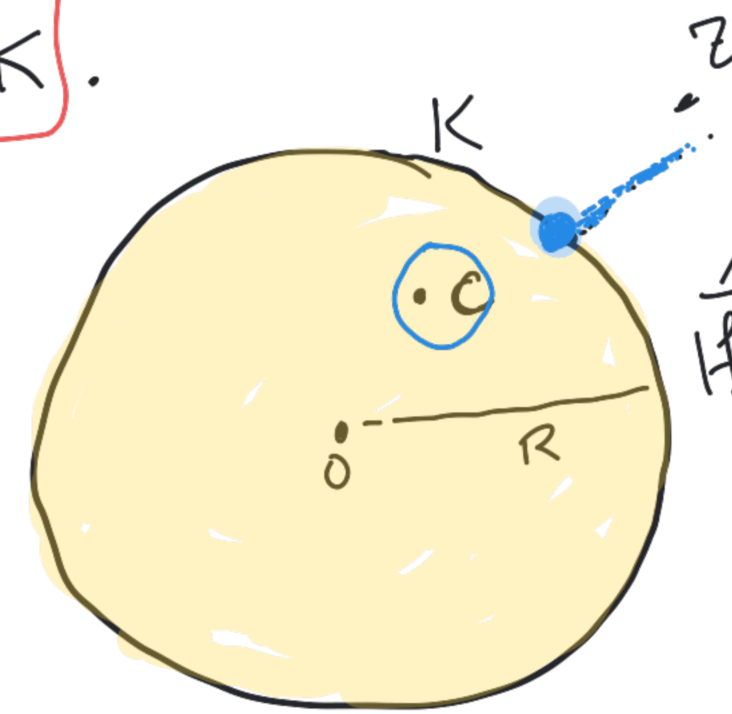
Quindi $\displaystyle\lim_{|z| \to \infty} \frac{1}{f(z)} = 0.$

Quindi, fissato $c \in \mathbb{C}$, $\exists\, R > 0$, $R > |c|$ t.c.

$$\boxed{\frac{1}{|f(z)|} < \boxed{\frac{1}{|f(c)|}}}, \quad \forall\, z : |z| \geq R.$$

Essendo $\frac{1}{|f(z)|}$ una funzione continua, se $K := \overline{D(0,R)}$, allora

$\boxed{\frac{1}{|f(z)|} \text{ ha un massimo in } z_0 \in K}$.




$$\frac{1}{|f(z)|} < \frac{1}{|f(c)|}$$

→ Per costruzione, questo massimo non può essere sulla frontiera di $K \Longrightarrow z_0 \in \operatorname{int}(K) = D(0,R)$.

$\Longrightarrow \boxed{\frac{1}{f(z_0)}}$ è loc. costante in $z_0$

↑
Principio del Massimo Modulo

$\Longrightarrow f(z)$ è costante ↯