# Il teorema di Cauchy e il primo gruppo di omologia

**Def** [Catena] i) Una catena in $U$ è una somma formale

$$\boxed{\gamma = \sum_{i=1}^{n} m_i \gamma_i}, \quad m_i \in \mathbb{Z}, \quad \gamma_i \text{ curva in } U.$$

ii) Una catena chiusa in $U$ (o ciclo) è una somma formale

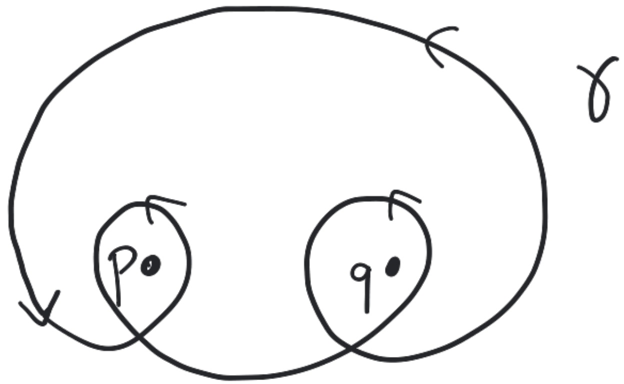
$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} m_i \gamma_i, \quad m_i \in \mathbb{Z}, \quad \gamma_i \text{ curva chiuse in } U.$$

**Def** i) Data una catena $\gamma = \sum m_i \gamma_i$ in $U$ e $f : U \to \mathbb{C}$ olomorfa,

$$\int_\gamma f = \sum_{i=1}^{n} m_i \int_{\gamma_i} f$$

ii) Diciamo che $\gamma$ è omologo a $\eta$ in $U$ se $\boxed{W(\gamma, \alpha) = W(\eta, \alpha)}$ $\forall\, \alpha \notin U$.

Esempio




$U = \mathbb{C} \setminus \{p, q\}$

Sia - $\gamma_p$ cappio intorno a $p$ in senso antiorario

- $\gamma_q$ cappio intorno a $q$ in senso antiorario

Allora

$\gamma$ e' omologo a $2\gamma_p + 2\gamma_q = \eta$

( Basta verificare che $w(\gamma, p) = w(\eta, p)$
e $w(\gamma, q) = w(\eta, q)$ )

OSS (esercizio) : Ogni catena chiusa e' omologa a una combinazione di curve chiuse semplici.

Esercizio La formula globale di Cauchy vale per catene chiuse.

**Def** [ Primo gruppo di omologia ]

$$H_1(U, \mathbb{Z}) := \{\text{catene chiuse in } U\} / \text{omologia}$$

↳ è un gruppo abeliano (...)

**Esempio** $U = \mathbb{C} \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$

Allora $H_1(U, \mathbb{Z}) = \langle \gamma_{p_1} \rangle \oplus \dots \oplus \langle \gamma_{p_k} \rangle \cong \mathbb{Z}^k$.

**Fatto** Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso e $p_0 \in U$.

Allora

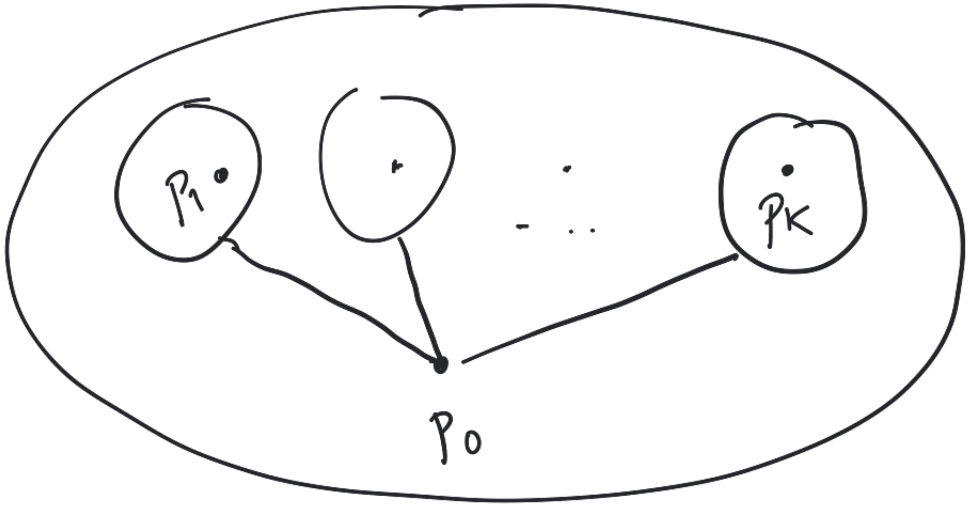
$$\begin{tikzcd} \pi_1(U, p_0) \arrow[rr, two heads] \arrow[dr, two heads] & & H_1(U, \mathbb{Z}) \\ & \pi_1(U, p_0)^{ab} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$\pi_1(U, p_0)^{ab} = \frac{\pi_1(U, p_0)}{[\pi_1(U, p_0), \pi_1(U, p_0)]}$$

<u>Esempio</u> $U = \mathbb{C} \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$

$$\pi_1(U, p_0) = \langle \gamma_{p_1} \rangle * \dots * \langle \gamma_{p_k} \rangle \cong \overbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}^{k \text{ volte}}$$

prodotto libero




Invece

$$H_1(U, p_0) \cong \mathbb{Z}^k = (\underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{k \text{ volte}})^{ab}$$

**Teorema** [Teorema di Cauchy]

Siano $\gamma$ e $\eta$ catene chiuse in $U$ e $f: U \to \mathbb{C}$ olomorfa.

Se $\gamma$ e $\eta$ sono omologhe in $U$, allora

$$\int_\gamma f = \int_\eta f .$$

dim (Usando la formula globale di Cauchy)

Se $\gamma$ e $\eta$ sono omologhe, allora $\gamma - \eta$ e' omologa a $0$.

Sia $z_0 \in U - \{\gamma \cup \eta\}$.

Consideriamo $F(z) = (z - z_0) f(z)$, olomorfa in $U$

Allora
$$\int_\gamma f(z)\,dz - \int_\eta f(z)\,dz = \int_{\gamma-\eta} f(z)\,dz \underset{\substack{\uparrow \\ F.G.C.}}{=} 2\pi i\, W(\gamma - \eta, z_0)\, F(z_0) = 0$$

■

<u>OSS</u> Formula Globale di Cauchy (F.G.C) $\Longleftrightarrow$ Teorema di Cauchy (sull'invarianza omologica).

$\Longrightarrow)$ ok

$\Longleftarrow)$ Consideriamo $z_0 \in U \setminus \gamma$ e definiamo $U^* = U \setminus \{z_0\}$.

Allora, siccome $\gamma$ e' omologa a $0$ in $U$, otteniamo che $\gamma$ e' omologa a $W(\gamma, z_0)\, C_{z_0}$ in $U^*$, dove $C_{z_0}$ e' un piccolo cappio in $U$ intorno a $z_0$ (che non interseca $\gamma$).

Siccome $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ e' olomorfa in $U^*$, il Teorema di Cauchy implica che

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = W(\gamma, z_0)\int_{C_{z_0}} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \underset{\substack{\uparrow \\ \text{F.L.C.}}}{=} W(\gamma, z_0)\cdot 2\pi i \cdot f(z_0).$$

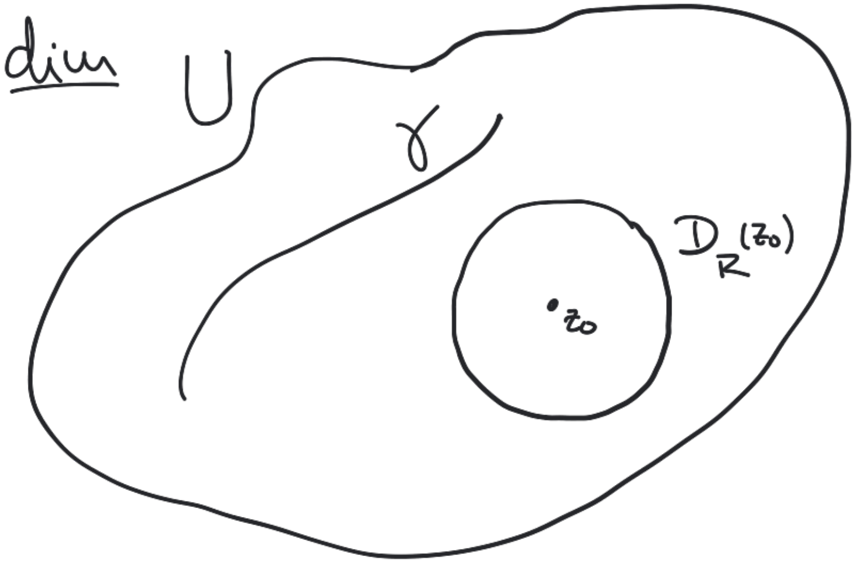
$\blacksquare$

**Teorema** Sia $\gamma$ una catena $C^1$ a tratti contenuta in un aperto $U$ e $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ continua. Allora

$$f : U \setminus \gamma \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \text{e' olomorfa}$$
$$z \longmapsto \int_\gamma \frac{g(w)}{w-z}\, dw$$

con derivate $\displaystyle f^{(n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw .$

**dim**




$\gamma$ compatto e $z_0 \notin \gamma$

$$\Rightarrow \exists\, R > 0 \text{ t.c. } \begin{cases} \overline{D_R(z_0)} \cap \gamma = \emptyset \\ \overline{D_R(z_0)} \subset U . \end{cases}$$

Sia $0 < s < r$ e fissiamo $z \in D_s(z_0)$

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0}\left(\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}\right) =$$

$$= \frac{1}{w-z_0}\left(1+\frac{z-z_0}{w-z_0}+\frac{(z-z_0)^2}{(w-z_0)^2}+\dots\right)$$ , che converge uniformemente se $w \in \gamma$:

infatti, $\begin{cases} z \in D_s(z_0) \\ w \in \gamma \end{cases} \Rightarrow \left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < \frac{s}{r} < 1$.

Inoltre, $g$ è limitata su $\gamma$ perché $\left|\begin{array}{l} \gamma \text{ è compatto} \\ g \text{ continua} \end{array}\right.$

$$\underset{z \in D_s(z_0)}{\Rightarrow} f(z) = \int_\gamma \frac{g(w)}{w-z}\,dw = \int_\gamma \frac{g(w)}{w-z_0}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n dw \underset{\text{conv. uniforme su } \gamma}{=}$$

$$= \sum_{n\geq 0}(z-z_0)^n \int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw$$

Otteniamo quindi che

f è analitica in $D_\rho(z_0)$

e $$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \int \frac{g(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw \qquad \blacksquare$$

<u>Oss</u>. Mostrare che f è olomorfa ($\Rightarrow$ analitica) è più semplice.

$\hookrightarrow$ <u>esercizio</u>.

# Applicazioni del T. di Cauchy (5.1, Lang).

Consideriamo $\{f_n\}$ succ. di funzioni olomorfe su $U$ e supponiamo che $f_n \to f$ uniformemente. $\rightsquigarrow$ $f$ è olomorfa?

<u>Teorema</u> Sia $\{f_n\}$ succ. di funzioni olomorfe su $U$ e supp. che $\{f_n\} \longrightarrow f$ uniformemente su ogni compatto $K \subseteq U$.

Allora

(i) $f$ è olomorfa;

(ii) $f_n'$ converge uniformemente sui compatti a $f'$;

(iii) $\forall\, \gamma$ catena chiusa in $U$, si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n = \int_\gamma f.$$

**Esempio 1** Sia $U = D_1(0)$ e $f_n(z) = z^n$

Allora $f_n \to 0$ uniformemente sui compatti ma non uniformemente su $U$.

Infatti, $\sup_{z \in D_1(0)} |z^n - 0| = 1 \not\to 0$, mentre

$\forall\, K \subset D_1(0)$, $\exists\, \rho < 1 : K \subset D_\rho(0)$ e

$$\sup_{z \in K} |z^n - 0| \leq \sup_{z \in D_\rho(0)} |z^n - 0| \leq \rho^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Quindi: conv. uniforme $\Rightarrow$ conv. uniforme sui compatti $\Rightarrow$ convergenza.

**Esempio 2**: $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, serie con raggio di convergenza $R > 0$.

Allora la serie converge uniformemente sui compatti di $D_R(0)$ ma non nec. su $D_R(0)$.

$\hookrightarrow$ Esempio: la serie geometrica.

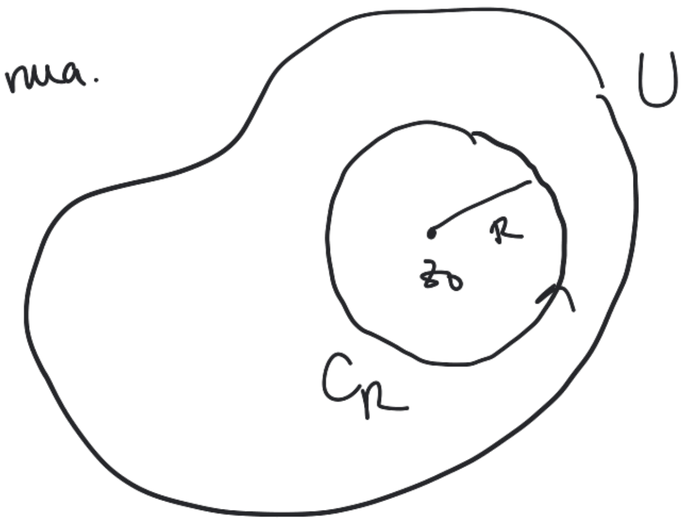
dim (1') $f_n \longrightarrow f$ uniformemente sui compatti $\overset{?}{\Rightarrow}$ $f$ olomorfa ?

- $f$ continua: $\forall z_0 \in U$, sia $\overline{D_R(z_0)} \subset U$.

  Allora $f_n \to f$ unif. in $\overline{D_R(z_0)} \Rightarrow f$ continua.

- <u>$f$ olomorfa</u> in $z_0$:

  sia $C_R = \partial(\overline{D_R(z_0)})$ percorso in senso antiorario




Allora, $\forall z \in D_R(z_0)$,

$$f_n(z) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{F.I.C.}}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f_n(w)}{w-z}\, dw$$

- Sia $z \in \overline{D}_{\frac{R}{2}}(z_0)$. Allora

$$\left|\int_{C_R}\left[\frac{f_n(w)}{w-z}-\frac{f(w)}{w-z}\right]dw\right| \le \sup_{w\in C_R}\left|\frac{f_n(z)-f(w)}{\underbrace{w-z}_{\ge \frac{R}{2}}}\right| \cdot L(C_R)$$

$$\le \sup_{w\in C_R}\frac{|f_n(z)-f(w)|}{\frac{R}{2}} \cdot L(C_R) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

perché $f_n \to f$ uniformemente su $C_R \subset \overline{D_R(z_0)}$

Quindi abbiamo

$$\forall z \in \overline{D_{\frac{R}{2}}(z_0)}, \quad f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f_n(w)}{w-z}\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(w)}{w-z}\,dw,$$

che è olomorfa per il teorema precedente.

ii) Sia $K \subset U$ compatto

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_{\frac{R}{2}}(z_i) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_R(z_i) \subset U.$$

Per il teorema integrale di Cauchy per le derivate, sappiamo che

$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f_n(w)}{(w-z)^2}\,dw, \quad \forall z \in D_R(z_i)$$

e

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw, \quad \forall z \in D_R(z_i)$$

Quindi, dato $z \in D_{\frac{R}{2}}(z_i)$,

$$\left| f_n'(z) - f'(z) \right| = \frac{1}{2\pi} \sup_{z \in D_{\frac{R}{2}}(z_i)} \left| \int_{C_R} \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^2} \, dw \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \sup_{z \in D_{\frac{R}{2}}(z_i)} \left| \frac{f_n(w) - f(w)}{(z-w)^2} \right| \cdot L(C_R)$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \underbrace{\sup_{z \in D_{\frac{R}{2}}(z_i)} \left| f_n(w) - f(w) \right|}_{\to 0} \cdot \frac{L(C_R)}{\left(\frac{R}{2}\right)^2}$$

Quindi $f_n' \to f'$ uniformemente su $D_{\frac{R}{2}}(z_i)$, $\forall 1 \leq i \leq n$.

Siccome $K$ e' coperto da un numero finito di $D_{\frac{R}{2}}(z_i)$, segue che $f_n$ converge uniformemente a $f'$ su $K$.

(iii) Possiamo ridurci a:

- $\gamma$ curva (per linearità)
- $\gamma$ $C^1$ (basta prendere una curva $C^1$ $\tilde{\gamma}$ vicina a $\gamma$ in $U$).

Abbiamo quindi

$$\left| \int_\gamma f_n - \int_\gamma f \right| \leq \underbrace{\sup_{z \in \gamma} |f_n(z) - f(z)|}_{\to 0} \cdot L(\gamma)$$

perché $\gamma$ compatto.

**Esempio** Sia $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$. Allora $f$ è olomorfa per $Re(z) > 1$.

- $\forall n,\ f_n(z) = n^{-z} = e^{-z \log n}$ è una funzione intera e la serie $\sum f_n$ converge uniformemente e assolutamente per $f$ su $D_c = \{ z \in \mathbb{C} : |z| \geq c \},\ \forall c > 1$.

Infatti, $\left| e^{-z \log n} \right| \underset{z=x+iy}{=} \left| e^{-x \log n} \cdot e^{-iy \log n} \right| = n^{-x}$

Quindi, fissato $c > 1$ e se $Re(z) = x \geq c$, $|n^{-z}| \leq n^{-c}$.

Siccome $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^c}$ converge (perché $c > 1$), concludiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ converge uniformemente e assolutamente su $D_c$.

Usando il teorema precedente, concludiamo che

$f$ e' olomorfa per $U = \{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 1 \}$

e che $$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^z} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\log n}{n^z} \quad \text{per } z \in U.$$