Teorema dei residui

Def Sia f una funzione con singolarità isolate in z_0 e

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

lo sviluppo di f in serie di Laurent in z_0.

Definiamo il residuo di f in z_0 come

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) := a_{-1} \quad \left(\text{ossia, il coef. di } \frac{1}{z-z_0} \text{ nello sviluppo}\right).$$

Esempio Sia $f(z) = \dfrac{z^2}{z^2-1}$, olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$.

Allora $\mathrm{Res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{2}$: $\quad f(z) = \dfrac{z^2}{(z-1)(z+1)} = \dfrac{\frac{z^2}{z+1}}{z-1} = \dfrac{1}{z-1} \dfrac{z^2}{z+1}$ → olomorfa

$\dfrac{z^2}{z+1} = a_0 + a_1(z-1) + \dots$

Quindi $\mathrm{Res}_{z=1} f(z) = a_0 = g(1)$, dove $g(z) = \dfrac{z^2}{z+1}$.

Teorema dei Residui I (versione locale)

Sia $f : D_R(z_0) - \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa.

Sia C_δ, con $0 < \delta < R$ una circonferenza di raggio δ centrata in z_0. Allora $\boxed{\int_{C_\delta} f = 2\pi i \, \mathrm{Res}_{z_0}(f)}$.

dim Sia $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ lo sviluppo di f in serie di Laurent in z_0. Allora abbiamo che:

$$\int_{C_\delta} f\, dz = \int_{C_\delta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \, dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \overbrace{\int_{C_\delta} (z-z_0)^n}^{= \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{se } n = -1 \end{cases}} =$$

convergenza della serie è uniforme sui compatti di $D_R(z_0)$ $\Rightarrow$ possiamo integrare termine a termine.

$$= \underbrace{a_{-1}}_{\mathrm{Res}_{z=z_0} f} \cdot 2\pi i .$$

∎

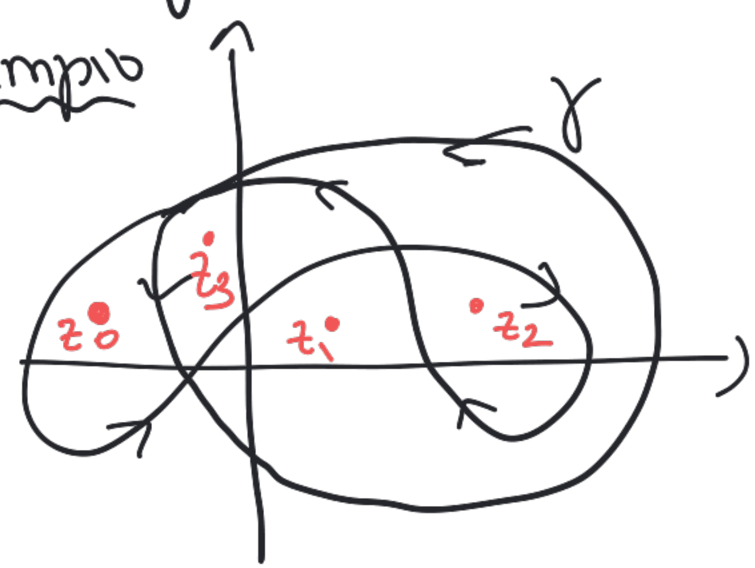
Teorema dei residui II (versione globale)

Sia $f : U - \{z_1, \dots, z_n\} \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa e sia γ un ciclo in U omologo a 0 in U e t.c. $z_i \notin \gamma$, $i = 1, \dots, n$.

Allora
$$\boxed{\int_\gamma f = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} W(\gamma, z_i)\, \mathrm{Res}_{z_i}(f)}$$

Oss Generalizza teorema di Cauchy sull'invarianza omologica e la Formula integrale di Cauchy. ← esercizio

Esempio



Supp. che f abbia singolarità isolate in z_0, z_1, z_2, z_3, con $\mathrm{Res}_{z_i}(f) = b_i$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Allora $\int_\gamma f\, dz = 2\pi i \,(b_0 + b_1 + 2 b_3)$.

dim Sia $U^* = U - \{z_1, .., z_n\}$ e siano $C_1, .., C_n$ piccoli cappi intorno a $z_1, .., z_n$.

Se γ è omologa a 0 in U

$\Rightarrow$ γ e' omologa a $\sum_{k=1}^{n} W(\gamma, z_i)\, C_i$ in U^*.

Quindi, per il teorema di Cauchy, abbiamo che

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} W(\gamma, z) \int_{C_i} f(z)\,dz$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} W(\gamma, z_i)\, \mathrm{Res}_{z_i}(f).$$

Teorema dei residui I

$\boxtimes$

Proprietà (Calcolo dei Residui)

a) Supponiamo che f ha un polo semplice in z_0 e che g è una funzione olomorfa in z_0. Allora,

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f \cdot g) = g(z_0)\, \mathrm{Res}_{z_0}(f)$$

b) Supponiamo che $f(z_0) = 0$ ma che $f'(z_0) \neq 0$

$\Longrightarrow$ $\frac{1}{f}$ ha un polo semplice in z_0 e $\mathrm{Res}_{z_0}\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{1}{f'(z_0)}$.

<u>dim</u>

Supponiamo che $z_0 = 0$.

a) Sia $f(z) = \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots$ e $g(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$

Allora $f(z)g(z) = \frac{\overset{=\mathrm{Res}_0 f}{a_{-1}}}{z} \underset{=g(0)}{b_0} + \{\text{termini di ordine superiore}\}$.

b) Se $f(0)=0$ e $f'(0)\neq 0$, allora possiamo scrivere

$$f(z) = a_1 z\,(1+h(z)),$$ con $h(z)$ analitica e $\mathrm{ord}(h)\geq 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{a_1 z}\cdot\frac{1}{1+h(z)} = \frac{1}{a_1 z}\left(1-h+h^2-h^3+\dots\right)$$

$$\frac{1}{a_1} = \operatorname{Res}_{z=0}\frac{1}{f} = \frac{1}{f'(0)}$$

Quindi $$\frac{1}{f(z)} = \frac{\frac{1}{a_1}}{z} + \{\text{termini di ordine superiore}\}$$ ∎

<u>Esempi</u> 1) $f(z)=\sin z$: Allora $f(0)=0$ e $f'(0)=\cos(0)=1\neq 0$.

Quindi $\frac{1}{\sin z}$ ha un polo semplice in 0 e $\operatorname{Res}_{z=0}\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{\cos 0} = 1$.

2) $$f(z) = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2} = \frac{1}{z+1}\cdot\frac{z^2}{(z-1)^2} \Rightarrow \operatorname{Res}_{z=-1} f = \left(\frac{z^2}{z-1}\right)\Big|_{z=-1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

invece per calcolare $\mathrm{Res}_{z=1} \dfrac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}$ non possiamo utilizzare né a) né b).

$$f(z) = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{z^2}{z+1}$$

$= g(z)$, olomorfa in $z=1$.

Allora $g(z) = b_0 + b_1 (z-1) + b_2 (z-1^2) + \cdots$

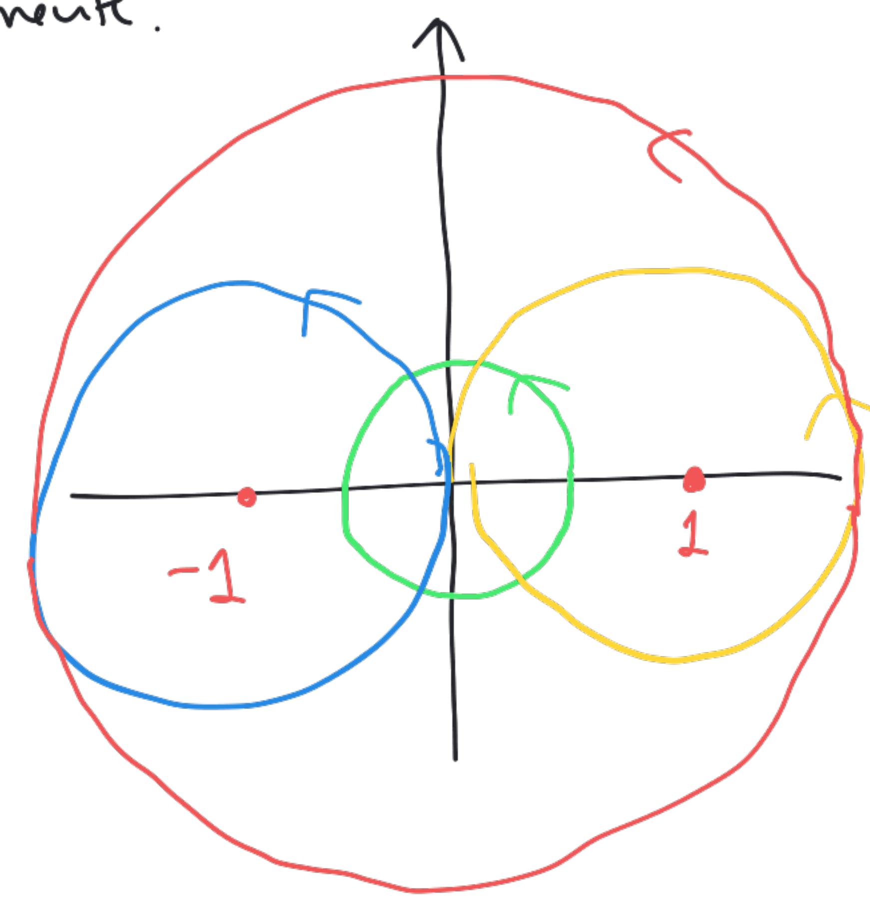
$= g(1) + g'(1)(z-1) +$ termini di ordine superiore.

Otteniamo quindi che

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}\left(g(1) + g'(1)(z-1) + \text{termini di ordine superiore}\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Res}_{z=1} f(z) = g'(1) = \left(\frac{2z(z+1) - z^2}{(z+1)^2}\right)\Bigg|_{z=1} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Siano adesso $C_{\frac{1}{2}}(0)$, $C_1(1)$, $C_1(-1)$ e $C_2(0)$ circonferenze orientate positivamente.



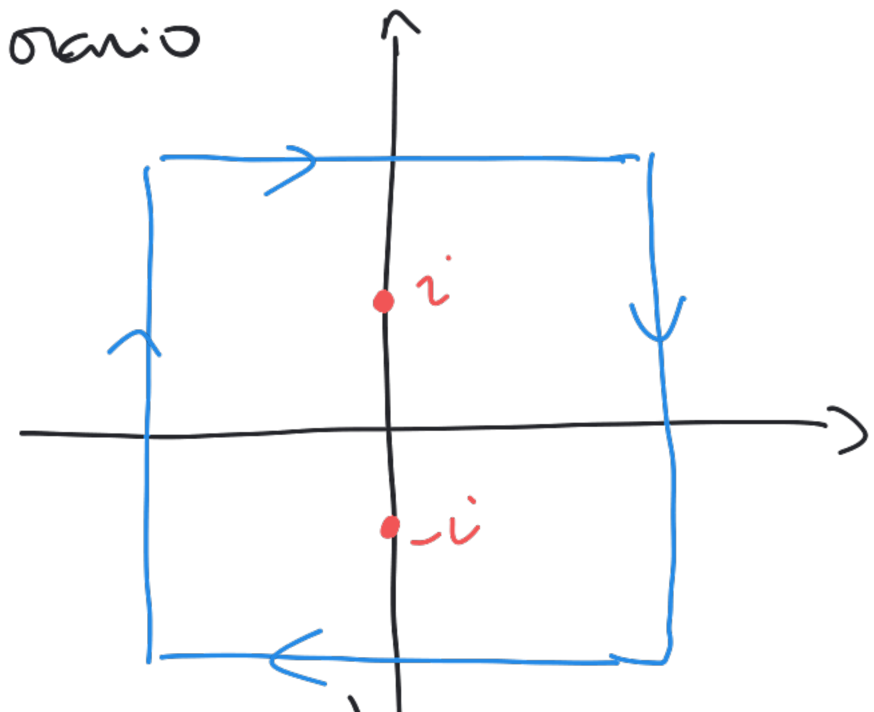
$$\int_{C_{\frac{1}{2}}(0)} f(z)\,dz = 0$$

$$\int_{C_1(1)} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=1} f(z) = 2\pi i \frac{3}{4} = \frac{3\pi i}{2}$$

$$\int_{C_1(-1)} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-1} f(z) = 2\pi i \left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i$$

$$\int_{C_2(0)} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=-1} f(z) + \operatorname{Res}_{z=1} f(z)\right) = 2\pi i \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \frac{\pi i}{2}$$

Esempio Sia $f(z) = z^2+1$ e R il quadrato di centro l'origine e lato uguale a 4 orientato nel senso orario



Calcolare $\displaystyle\int_R \frac{1}{f(z)}\, dz$.

$f(z) = (z-i)(z+i)$

Quindi $\displaystyle\int_R \frac{1}{f(z)}\, dz = -2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname{Res}_{z=-i} f(z) \right) = 0$

$f'(z) = 2z$, quindi possiamo applicare Prop. b) in entrambi i casi e ottenere

$\displaystyle\operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$ e che $\displaystyle\operatorname{Res}_{z=-i} \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{-2i} = \frac{i}{2}$