Corso di laurea in Matematica - A. A. 2024/2025
AC310 - Analise Complessa - Esercitazione 1

DOCENTE: MARGARIDA MELO

Esercizio 1. *Esprimere i seguenti numeri nella forma* $x + iy$, *dove* $x, y \in \mathbb{R}$:

(i) $(-1+3i)^{-1}$;

(ii) $(1+i)i(2-i)$;

(iii) $\frac{1+i}{i}$;

(iv) $z = \frac{i-4}{2i-3}$.

Esercizio 2. *Sia* $z = a + ib \in \mathbb{C}$ *tale che* $b \neq 0$. *Mostrare che vale la seguente formula per le radici quadrate di* z:

$$\sqrt{a+ib} = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}.$$

Esercizio 3. *Siano* $z = x + iy$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. *Dimostrare le seguenti proprietà del coniugio e valore assoluto di numeri complessi:*

(i) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$;

(ii) $z\overline{z} = x^2 + y^2 \geq 0$;

(iii) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$;

(iv) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;

(v) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2|$.

Esercizio 4. *Siano* $\alpha = a + ib$, $z = x + iy$ *e* $c \in \mathbb{R}_{>0}$. *Descrivere, usando solo* a, b, x, y *e* c *il luogo dei numeri complessi che soddisfano l'equazione*

$$|z - \alpha| = c.$$

Esercizio 5. *Descrivere geometricamente gli insiemi di punti* $z \in \mathbb{C}$ *che soddisfano le equazioni*

(i) $|z - i + 3| = 5$;

(ii) $|z - i + 3| \leq 5$;

(iii) $|z - i + 3| > 5$.

Esercizio 6. *Mostrare che non esiste alcun numero complesso z tale che*

$$|z| - z = i.$$

Esercizio 7. *Mostrare che* $\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| < 1$ *se* $|a| < 1$ *e* $|b| < 1$ *e che* $\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| = 1$ *se* $|a| = 1$ *oppure se* $|b| = 1$.

Esercizio 8. *Dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, ossia che dati numeri complessi* $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n$,

$$|z_1 w_1 + \cdots + z_n w_n|^2 \leq (\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2)(\sum_{j=1}^{n} |w_j|^2).$$

Suggerimento*: notare che* $\sum_{j=1}^{n} |z_j + \lambda \bar{w}_j|^2 \geq 0$ *per ogni* $\lambda \in \mathbb{C}$ *arbitrario. Per concludere scegliere* λ *opportuno.*