Corso di laurea in Matematica - A. A. 2024/2025
AC310 - Analisi Complessa - Esercitazione 2
DOCENTE: MARGARIDA MELO

Esercizio 1. *Sia $z \in \mathbb{C}$ un numero complesso. Risolvere le seguenti equazioni in $\mathbb{C}$:*

(i) $e^z = 1$;

(ii) $e^z = i$;

(iii) $e^z = re^{i\theta}$, $r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. *Calcolare l'immagine attraverso la funzione esponenziale dei seguenti insiemi:*

(i) $A = \{z \in \mathbb{C} : \theta_1 < Im(z) < \theta_2, \theta_2 - \theta_1 \in]0, 2\pi[\}$;

(ii) $B = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0, 0 < Im(z) < 2\pi\}$.

Esercizio 3. *Determinare i termini di ordine minori o uguali a 3 delle serie di Laurent formali di:*

(i) $\exp(T)\sin(T)$;

(ii) $\frac{\exp(T)-1}{T}$

(iii) $\frac{\cos(T)}{\sin(T)}$

Esercizio 4. *Sia $m \in \mathbb{N}$ e si definisca la consideri la serie di potenze formale*

$$B_{\frac{1}{m}}(T) = (1+T)^{\frac{1}{m}} = \sum_{n\geq 0} \binom{\frac{1}{m}}{n} T^n = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\frac{1}{m}(\frac{1}{m}-1)\dots(\frac{1}{m}-n+1)}{n(n-1)\dots 1} T^n \in \mathbb{C}[[T]]$$

(i) Dimostrare che vale la seguente identità tra serie di potenze formali

$$\left(B_{\frac{1}{m}}(T)\right)^m = 1 + T.$$

(ii) Discutere se $B_{\frac{1}{m}}(T)$ è invertibile in $\mathbb{C}[[T]]$.

Esercizio 5. *Sia w un numero complesso e consideriamo la sucessione $\{a_n\} = \{w^n\}$. Dimostrare che $\{a_n\}$ è divergente se $|w| > 1$ e che converge a 0 se $|w| < 1$.*

Esercizio 6. *Discutere l'esistenza di* $\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}}{z}$.

Esercizio 7. *Sia* $\alpha \in \mathbb{C}$ *tale che* $|\alpha| < 1$. *Determinare la somma della serie di potenze* $\sum_{n\geq 1} \alpha^n$.

Esercizio 8. *Si consideri la serie di potenze per* $\log(1+x)$, *con* $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$, *e si consideri la analoga serie complessa sostituendo* x *con un numero* $z \in \mathbb{C}$. *Si mostri che la serie converge assolutamente per* $|z| < 1$. *Stessa domanda per* $\log(1-x)$.

Esercizio 9. *Discutere la convergenza delle seguenti serie di potenze.*

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!} z^{2n}$;

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha + e^{\alpha n}}{n} z^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^2 z^n$;

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}} z^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 10. *Siano* $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ *serie di potenze aventi raggi di convergenza rispettivamente* R_1 *e* R_2. *Cosa possiamo concludere riguardo il raggio di convergenza delle serie* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n$*?*

Esercizio 11. *Siano* α *e* β *numeri complessi con* $|\alpha| < |\beta|$ *e si consideri la serie di potenze* $\sum_{n\geq 0} (3\alpha^n - 5\beta^n) z^n$. *Si determini il raggio di convergenza della serie.*

Esercizio 12. *Si consideri la serie di potenze* $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$. *Mostrare che il raggio di convergenza della serie è uguale a 1 e mostrare che la sua funzione somma è continua in* $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.