Corso di laurea in Matematica - A. A. 2024/2025

AC310 - Analise Complessa - Foglio di esercizi 1

Consegnare a ricevimento o per email entro 20/03/2025

Esercizio 1.

Sia $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *una funzione olomorfa in un aperto* $U \subset \mathbb{C}$.

(i) *Se* f *non è mai nulla in* U, *mostrare che* $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ *è olomorfa in* U *e determinare una formula per la sua derivata.*

(ii) *Si dimostri che in coordinate polari* $x = r\cos\theta$ *e* $y = r\sin\theta$, *valgono le equazioni di Cauchy-Riemann polari:*

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \ \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Esercizio 2. *Si dimostri che, se* $|z| \neq 1$, *esiste* $f(z) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{z^n-1}{z^n+1}\right)$. *Esiste una funzione continua su* $\mathbb{C}$ *che ristretta a* $\mathbb{C} \setminus \{|z| = 1\}$ *coincida con* f*?*

Esercizio 3. *Mostrare che la mappa esponenziale complessa è un rivestimento da* $\mathbb{C}$ *a* $\mathbb{C}^*$.

Esercizio 4. *Per ogni numero complesso* $\alpha \in \mathbb{C}$, *si consideri la serie di potenze formale*

$$(1+T)^\alpha = \sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}T^n = 1 + \sum_{n\geq 1}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n(n-1)\dots 1}T^n \in \mathbb{C}[[T]]$$

(i) *Dimostrare che il raggio di convergenza* R *di* $\sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}z^n$ *è uguale a*

$$R = \begin{cases} +\infty \ \textit{se}\ \alpha \in \mathbb{N}, \\ 1 \ \textit{se}\ \alpha \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

(ii) *Dimostrare che per ogni* $\alpha \in \mathbb{C}$ *valgono le seguenti identità tra serie di potenze formali*

$$(1+T)^\alpha = \exp(\alpha\log(1+T)) \ \textit{e}\ \log(\exp(T)) = T$$

dove $\exp(T)$ *e* $log(1+T)$ *sono le serie di potenze formali in* $\mathbb{C}[[T]]$ *definite da*

$$\exp(T) := \sum_{n\geq 0}\frac{T^n}{n!} \ \textit{e}\ \log(1+T) := \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}T^n}{n}$$

*(*Sugg.: *Considerare prima il caso* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e sucessivamente osservare che il coefficiente in ciascuna serie è un polinomio in* α.*)*

(iii) *Dimostrare che per ogni* α *e* β *complessi vale la seguente identità tra serie di potenze formali*

$$(1+T)^\alpha(1+T)^\beta = (1+T)^{\alpha+\beta}$$