Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

GE220 - Geometria 3 - Primo Appello: 5/06/2017

DOCENTE: MARGARIDA MELO

Durata: 3h15m

Nome del candidato:
Numero di matricola:

Parte I

Esercizio 1. (2 punti) *Per ciascuno dei seguenti spazi topologici, indicare (senza giustificazione) l'interno, la chiusura, la frontiera e il derivato.*

(i) $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, xy \neq 0\}$ *munito della topologia di sottospazio di* $\mathbb{R}^2$.

R:

(ii) $A_4 = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$.

R:

(iii) $A_2 = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ *dove* $\mathbb{R}$ *è munito della topologia cofinita.*

R:

Esercizio 2. (6 punti) *Sia* X *uno spazio topologico. Stabilire, giustificando, se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.*

(i) Dati spazi topologici qualsiasi X *e* Y, *la proiezione* $\pi : X \times Y \to Y$ *è una applicazione chiusa.*

R:

(ii) Un quoziente di uno spazio di Hausdorff è di Hausdorff.

R:

(iii) Una applicazione continua $f : X \to \mathbb{R}$ *dove* X *è uno spazio compatto ammette un valore massimo e un valore minimo su* X.

R:

(iv) $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ *e* $\mathbb{R}$ *sono omeomorfi.*

R:

Esercizio 3. *(*3 punti*) Sia X uno spazio topologico. Si ricordi che X si dice irriducibile se e solo se non esistono chiusi propri $C, D \subsetneq X$ tali che $X = C \cup D$. Si dimostri che le seguenti condizioni sono equivalenti.*

(i) *X è irriducibile.*

(ii) *Se U e V sono aperti non vuoti di X, allora $U \cap V \neq \emptyset$.*

(iii) *Ogni aperto non vuoto U di X è denso in X, i.e. $\bar{U} = X$.*

Esercizio 4. *(*3 punti*) Sia X uno spazio topologico compatto e Y uno spazio topologico. Dimostrare che*

(i) *Se Y è di Lindelöf, allora il prodotto $X \times Y$ è di Lindelöf.*

(ii) *La proiezione sul secondo fattore $p_2 : X \times Y \to Y$ è una mappa propria (una mappa continua $f : U \to V$ si dice propria se $f^{-1}(K)$ è compatto, per ogni compatto $K \subset V$).*

(iii) *Se X è anche di Hausdorff allora $p_2 : X \times Y \to Y$ è una mappa chiusa.*

Esercizio 5. *(*4 punti*) Uno spazio si dice di Tychonoff o completamente regolare se è uno spazio T_1 e se dati un chiuso $A \subset X$ e un punto $x \notin A$, esiste una funzione continua $f : X \to [0, 1]$ tale che $f(x) = 0$ e $f(A) = 1$.*

(i) *Si dimostri che uno spazio normale è anche di Tychonoff e che uno spazio di Tychonoff è regolare.*

(ii) *Senza utilizzare (i), si dimostri che uno spazio metrizzabile è di Tychonoff.*

(iii) *Si dimostri che $\mathbb{R}_l^2$, dove $\mathbb{R}_l$ è l'insieme dei numeri reali munito della topologia di Sorgenfrey, è completamente regolare ma non è normale.*

Parte II

Esercizio 6. *(*2 punti*) Per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^2$*, indicare (senza giustificazione) le componenti connesse e le componenti connesse per archi.*

(i) $A_1 = \mathbb{R}^3 \setminus \{x = 0\}$.

R:

(ii) $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 1 \ o \ (x+1)^2 + y^2 = 1\} \setminus (0,0)$.

R:

(iii) $A_3 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

R:

(iv) $A_4 = \mathbb{R}$ *munito della topologia di Sorgenfrey.*

R:

Esercizio 7. *(*6 punti*) Sia* X *uno spazio topologico. Stabilire, giustificando, se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.*

(i) Sia X *uno spazio topologico tale che* $X = \cup_{i\in I} X_i$*, dove gli* X_i *sono connessi e hanno un punto in comune. Allora* X *è connesso.*

R:

(ii) Le componenti connesse per archi di uno spazio topologico sono chiuse.

R:

(iii) Sia $T := \{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ *munito della topologia di sottospazio di* $\mathbb{R}$*. Allora* T *è totalmente sconnesso.*

R:

(iv) Uno spazio semplicemente connesso è contraibile.

R:

(v) Il toro $T^2 = S^1 \times S^1$ *ammette solo rivestimenti connessi non banali finiti.*

R:

Esercizio 8. *(*4 punti*) Sia X uno spazio metrico. Si dimostri che*

(i) Un sottospazio $Y \subset X$ è compatto se e solo se è chiuso e compatto per successioni.

(ii) Se X è completo e non ha punti isolati allora X non è numerabile.

(iii) Concludere che $\mathbb{R}$ è non numerabile.

Esercizio 9. *(*3 punti*)*

(i) Sia X uno spazio topologico. Si dimostri che X è contraibile se e solo se ogni mappa $f : X \to Y$, dove Y è uno spazio topologico arbitrario, è omotopa alla applicazione costante.

(ii) Si dimostri che un'applicazione continua $f : S^1 \to X$ è omotopa a un'applicazione costante se e solo se f si estende ad un'applicazione continua $g : D^2 \to X$.

Esercizio 10. *(*4 punti*)*

(i) Sia $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ un rivestimento e sia $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ una mappa dove Y è connesso per archi e localmente connesso per archi. Si dimostri il criterio di sollevamento, i.e., che esiste un sollevamento di f a una mappa $\tilde{f} : (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ se e solo se $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.

(ii) Si dimostri che se uno spazio Z connesso per archi e localmente connesso per archi con gruppo fondamentale finito ammette una mappa $f : Z \to S^1$, allora f è omotopa a un'applicazione costante.