Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

GE220 - Geometria 3 - Primo Appello: 5/06/2017

Docente: Margarida Melo

Durata: 3h15m

Nome del candidato:
Numero di matricola:

Parte I

Esercizio 1. (2 punti) *Per ciascuno dei seguenti spazi topologici, indicare (senza giustificazione) l'interno, la chiusura, la frontiera e il derivato.*

(i) $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, xy \neq 0\}$ *munito della topologia di sottospazio di* $\mathbb{R}^2$.

R: $int(A_1) = A_1$; $\overline{A}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$;
$Fr(A_1) = A_1' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, xy = 0\}$.

(ii) $A_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$.

R: $int(A_2) = \emptyset$; $\overline{A}_2 = Fr(A_2) = A_2' = A_2$.

(iii) $A_3 = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ *dove* $\mathbb{R}$ *è munito della topologia cofinita.*

R: $int(A_3) = \emptyset$; $\overline{A}_3 = Fr(A_3) = A_3' = \mathbb{R}$.

Esercizio 2. (6 punti) *Sia* X *uno spazio topologico. Stabilire, giustificando, se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.*

(i) Dati spazi topologici qualsiasi X *e* Y, *la proiezione* $\pi : X \times Y \to Y$ *è una applicazione chiusa.*

R: Falso. La proiezione in generale è una applicazione aperta. Un'esempio di una proiezione non chiusa si ottiene prendendo $\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la proiezione nel primo fattore e il chiuso $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$. Allora $\pi(V) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, che non è chiaramente un chiuso di $\mathbb{R}$.

(ii) Un quoziente di uno spazio di Hausdorff è di Hausdorff.

R: Falso. Basta prendere ad esempio la proiezione della unione di due rette nella "retta con un punto doppio": $X = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \mathbb{R} \times \{1\} \subset \mathbb{R}^2$ e la mappa quoziente $\pi : X/\sim \to Y$ dove $(x,y) \sim (x',y')$ se $x = x'$ e $x \neq 0$.

(iii) Una applicazione continua $f : X \to \mathbb{R}$ *dove* X *è uno spazio compatto ammette un valore massimo e un valore minimo su* X.

R: Vero. L'imagine $f(X)$ di f è un compatto di $\mathbb{R}$, quindi un chiuso e limitato. Essendo limitato ammette valori supremo e infimo. Siccome $f(X)$ è anche chiuso questi valori devono essere elementi di $f(X)$, quindi massimo e minimo di $f(X)$.

(iv) $[0,1] \subset \mathbb{R}$ *e* $\mathbb{R}$ *sono omeomorfi.*

R: Falso. Basta osservare che $[0,1]$ è compatto, mentre $\mathbb{R}$ non lo è, e che la compatezza è una proprietà topologica.

Esercizio 3. *(*3 punti*) Sia X uno spazio topologico. Si ricordi che X si dice irriducibile se e solo se non esistono chiusi propri $C, D \subsetneq X$ tali che $X = C \cup D$. Si dimostri che le seguenti condizioni sono equivalenti.*

(i) X è irriducibile.

(ii) Se U e V sono aperti non vuoti di X, allora $U \cap V \neq \emptyset$.

(iii) Ogni aperto non vuoto U di X è denso in X, i.e. $\bar{U} = X$.

R: Vedere esercitazione 2.

Esercizio 4. *(*3 punti*) Sia X uno spazio topologico compatto e Y uno spazio topologico. Dimostrare che*

(i) Se Y è di Lindelöf, allora il prodotto $X \times Y$ è di Lindelöf.

R: Sia $\mathcal{U} = A_i, i \in I$ in ricoprimento aperto di $X \times Y$. Cominciamo per osservare che, per definizione di topologia prodotto, basta supporre che gli A_i siano della forma $U_i \times V_i$, dove gli U_i sono un ricoprimento di X e i V_i sono un ricoprimento di Y. Dato $y \in X$, il sottospazio $X \times \{y\}$ è compatto, quindi è ricoperto da un numero finito di aperti della forma $U_i \times V_i$, per un sottoinsieme finito $I(y) \subset I$. Sia $V(y) = \cap_{i \in I(y)} V_i$. Allora $V(y)$ è un aperto che contiene y. Facendo variare $y \in Y$ si ottiene un altro ricoprimento di X che, essendo di Lindelöf, ammette un sottoricoprimento numerabile $V_{y_n}, n \in \mathbb{N}$. Si consideri adesso il sottoricoprimento numerabile di $\mathcal{U}$ dato da $\mathcal{U}' := \{U_i \times V_i : i \in I(x_n)\}$. Vediamo che $\mathcal{U}'$ è effettivamente un ricoprimento di $X \times Y$. Sia $(p, q) \in X \times Y$. Allora $q \in V_{y_i}$ per qualche $i \in \mathbb{N}$ e, per costruzione, $q \in V_j, \forall j \in I(y_i)$. Siccome le $U_k, k \in I(y_i)$ ricoprono X, esiste $k \in I(y_i)$ tale che $p \in U_k$. Il risultato segue perché allora $(p, q) \in U_k \times V_k \in \mathcal{U}'$.

(ii) La proiezione sul secondo fattore $p_2 : X \times Y \to Y$ è una mappa propria (una mappa continua $f : U \to V$ si dice propria se $f^{-1}(K)$ è compatto, per ogni compatto $K \subset V$).

R: Basta osservare che $p_2^{-1}(K) = X \times K$, che è compatto in quanto prodotto di compatti (si usa il Teorema di Tychonoff).

(iii) Se X è anche di Hausdorff allora $p_2 : X \times Y \to Y$ è una mappa chiusa.

R: In realtà basta utilizzare il fatto che X sia compatto. Sia $V \subset X \times Y$ chiuso e vediamo che $\pi(V)$ è chiuso in Y. Se $\pi(V) = Y$, allora è chiuso, quindi supponiamo che esiste $y_0 \in Y$ tale che $y_0 \notin \pi(V)$. Dobbiamo far vedere che esiste un aperto U di Y contenendo y_0 tale che $U \subset V^c$. Siccome $y_0 \notin \pi(V)$, allora $\forall x \in X, (x, y_0) \notin V$, e quindi esiste $U_x \times V_x$ aperto base contenendo (x, y_0) e tale che $U_x \times V_x \notin V$. Essendo $\{U_x\}_{x \in X}$ un ricoprimento di X, che è compatto, esiste un sottoricoprimento finito $U_{x_i}, i \in I$, dove I è un insieme finito. Sia $V' = \cap_{x_i, i \in I} V_{x_i}$. Allora $U' := \cup_{i \in I}(U_{x_i} \times V')$ è un ricoprimento di $X \times \{y_0\}$ contenuto in V^c, e quindi $U := \pi(U')$ è un intorno aperto di y_0 contenuto in $\pi(V)^c$, come desiderato.

Esercizio 5. *(*4 punti*) Uno spazio si dice di Tychonoff o completamente regolare se è uno spazio T_1 e se dati un chiuso $A \subset X$ e un punto $x \notin A$, esiste una funzione continua $f : X \to [0, 1]$ tale che $f(x) = 0$ e $f(A) = 1$.*

(i) Si dimostri che uno spazio normale è anche di Tychonoff e che uno spazio di Tychonoff è regolare.

(ii) Senza utilizzare (i), si dimostri che uno spazio metrizzabile è di Tychonoff.

(iii) Si dimostri che $\mathbb{R}_l^2$, dove $\mathbb{R}_l$ è l'insieme dei numeri reali munito della topologia di Sorgenfrey, è completamente regolare ma non è normale.

R: Vedere foglio di esercizi per casa numero 2.

Parte II

Esercizio 6. *(*2 punti*) Per ciascuno dei seguenti spazi topologici, indicare (senza giustificazione) le componenti connesse e le componenti connesse per archi.*

(i) $A_1 = \mathbb{R}^3 \setminus \{x = 0\}$.

R: Ci sono due componenti connesse e connesse per archi,
$C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$ e $C_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x < 0\}$.

(ii) $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 1 \ o \ (x+1)^2 + y^2 = 1\} \setminus (0, 0)$.

R: Ci sono due componenti connesse e connesse per archi,
$A_2^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2 = 1\}\setminus\{(0, 0)\}$ e $A_2^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2+y^2 = 1\}\setminus\{(0, 0)\}$.

(iii) $A_3 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

R: A_3 è totalmente sconnesso, quindi ogni punto costituisce una componente connessa e connessa per archi.

(iv) $A_4 = \mathbb{R}$ *munito della topologia di Sorgenfrey.*

R: A_4 è totalmente sconnesso, quindi ogni punto costituisce una componente connessa e connessa per archi.

Esercizio 7. *(*6 punti*) Sia X uno spazio topologico. Stabilire, giustificando, se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.*

(i) Sia X uno spazio topologico tale che $X = \cup_{i\in I} X_i$, dove gli X_i sono connessi e hanno un punto in comune. Allora X è connesso.

R: Vero. Vedere ad esempio il corollario 11.9 sul Sernesi 2.

(ii) Le componenti connesse per archi di uno spazio topologico sono chiuse.

R: Falso. Si prenda ad esempio il pettine del topologo

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, \ x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \cup ([0, 1] \times \{0\}) \cup \{(0, 1)\}.$$

Allora $C_a(x, y) = X \setminus \{(0, 1)\}, \forall (x, y) \neq (0, 1)$ ma $\{(0, 1)\} \in \overline{C_a(x, y)}$, quindi non è chiuso in X.

(iii) Sia $T := \{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ munito della topologia di sottospazio di $\mathbb{R}$. Allora T è totalmente sconnesso.

R: Vero. Basta mostrare che qualsiasi due punti di T sono sconnessi. È chiaro se entrambi sono diversi da 0. Invece prendendo 0 e un'altro punto $\frac{1}{n}$, dato $\epsilon : 0 < \epsilon < \frac{1}{n}$, ponendo $U =]-1, \epsilon[\cap T$ e $V =]\epsilon, 2] \cap T$, otteniamo che U e V sono aperti di T che separano 0 da $\frac{1}{n}$.

(iv) Uno spazio semplicemente connesso è contraibile.

R: Falso. Ad esempio S^n dove $n \geq 2$ è uno spazio semplicemente connesso ma non contraibile.

(v) *Il toro $T^2 = S^1 \times S^1$ ammette solo rivestimenti connessi non banali finiti.*

R: Falso. T^2 ammette ad esempio un rivestimento universale, dato dal prodotto $(p,p) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$, dove $p : \mathbb{R} \to S^1$ è il rivestimento universale di S^1. Questo rivestimento ha chiaramente fibre a cardinalità infinita.

Esercizio 8. *(*4 punti*) Sia X uno spazio metrico. Si dimostri che*

(i) *Un sottospazio $Y \subset X$ è compatto se e solo se è chiuso e compatto per successioni.*

R: Basta osservare che in uno spazio metrico le nozioni di compatto e di compatto per successioni coincidono e che i compatti in uno spazio di Hausdorff sono necessariamente chiusi (X è sicuramente di Hausdorff in quanto spazio metrico).

(ii) *Se X è completo e non ha punti isolati allora X non è numerabile.*

R: Vedere tutorato 6.

(iii) *Concludere che $\mathbb{R}$ è non numerabile.*

R: Essendo $\mathbb{R}$ uno spazio metrico completo e senza punti isolati, da quanto dimostrato in *(ii)* si conclude che $\mathbb{R}$ non potrebbe essere numerabile.

Esercizio 9. *(*3 punti*)*

(i) *Sia X uno spazio topologico. Si dimostri che X è contraibile se e solo se ogni mappa $f : X \to Y$, dove Y è uno spazio topologico arbitrario, è omotopa alla applicazione costante.*

(ii) *Si dimostri che un'applicazione continua $f : S^1 \to X$ è omotopa a un'applicazione costante se e solo se f si estende ad un'applicazione continua $g : D^2 \to X$.*

R: Vedere foglio di esercizi 4.

Esercizio 10. *(*4 punti*)*

(i) *Sia $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ un rivestimento e sia $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ una mappa dove Y è connesso per archi e localmente connesso per archi. Si dimostri il criterio di sollevamento, i.e., che esiste un sollevamento di f a una mappa $\tilde{f} : (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ se e solo se $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.*

R: Vedere Proposizione 1.33.a pag. 61 sul Hatcher.

(ii) *Si dimostri che se uno spazio Z connesso per archi e localmente connesso per archi con gruppo fondamentale finito ammette una mappa $f : Z \to S^1$, allora f è omotopa a un'applicazione costante.*

R: Se esiste una tale mappa f da Z a S^1, allora questa induce un'omomorfismo di gruppi $f_* : \pi_1(Z, z_0) \to \pi_1(S^1, f(z_0))$, per qualsiasi punto $z_0 \in Z$. Siccome per ipotesi $\pi_1(Z, z_0)$ è finito e $\pi_1(S^1, f(z_0)) = \mathbb{Z}$, si conclude che f_* è la mappa costante nulla, ossia che $f_*(\pi_1(Z, z_0)) = 0$. Applicando il criterio di sollevamento, otteniamo che f si può sollevare ad una mappa $\tilde{f} : (Z, z_0) \to (\mathbb{R}, \widetilde{f(z_0)})$, dove $p : \mathbb{R} \to S^1$ è il rivestimento universale di S^1. Essendo $\mathbb{R}$ semplicemente connesso, $\tilde{f}$ è omotopa alla applicazione costante. Componendo questa omotopia con la mappa p si ottiene una omotopia tra $f = p \circ \tilde{f}$ e una applicazione costante in S^1.