Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Ingegneria civile – a.a. 2015/2016
Complementi di Matematica (L-Z)
Secondo Appello – 5 Luglio 2016.

Cognome e nome ______________________ **Matricola**_________

Specificare quale esame si deve sostenere: **Geometria** □ **Calcolo II** □

Se si è esonerati barrare la casella: □

Chi ha sostenuto e superato la prova di esonero e non ha sostenuto il primo appello deve solo risolvere gli esercizi dal 5 all'8.

Esercizio 1. Si verifichi che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

definisce un prodotto scalare $\times$ in $\mathbb{R}^3$. Applicando alla base canonica il procedimento di Gram-Schmidt determinare una base ortogonale rispetto a $\times$.

Soluzione: I minori principali sono positivi quindi A è definita positiva. Essendo anche simmetrica definisce un prodotto scalare. La base cercata è:

$$\{b_1 = e_1 = (1, 0, 0), \quad b_2 = (-1/2, 1, 0), \quad b_3 = (-1/3, -1/3, 1)\}$$

Esercizio 2. Si consideri la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$:

$$q(X, Y, Z) = X^2 + Y^2 + Z^2 + XY + XZ + YZ$$

a) classificare q e determinarne la segnatura. b) trovare una base ortonormale rispetto alla quale q sia diagonalizzata. c) calcolarne l'espressione in tale base. d) Determinare una base di Sylvester e la forma canonica di Sylvester.

Risposta:
Soluzione: Matrice della forma bilineare simmetrica associata:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Autovalori: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2,\ \lambda_3 = 2.$

Autospazi: $V_1 = \langle(-1, 0, 1), (1, -2, 1)\rangle,\ V_4 = \langle(1, 1, 1)\rangle,$

Base ortonormale diagonalizzante: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)\right\}$

Espressione di q in tale base: $q(X_1, X_2, X_3) = \frac{1}{2}X_1^2 + \frac{1}{2}X_2^2 + 2X_3^2.$

Forma canonica di Sylvester: $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2.$
Base di Sylvester: $\left\{(-1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -2, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 1)\right\}$

q è non degenere, definita positiva. Segnatura $(3, 0)$.

Esercizio 3. Si consideri la conica euclidea C_a di equazione:

$$X^2 + Y^2 + XY + aX + aY + 1 = 0$$

dove a è un parametro reale. Determinare i valori di a per cui **i)** la conica è degenere, **ii)** la conica è a centro, **iii)** il centro della conica è l'origine.

Soluzione: La matrice della conica è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a/2 & a/2 \\ a/2 & 1 & 1/2 \\ a/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

e $\det(A) = (3 - a^2)/4$ si annulla per $a = \pm\sqrt{3}$ e questi sono i valori che rendono C degenere. La matrice $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ è indipendente da a e ha determinante > 0 quindi C_a è un'ellisse per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Le coordinate del centro di C_a sono: $(-a/3, -a/3)$ e quindi per $a = 0$ il centro è l'origine.

Esercizio 4. Determinare un'equazione cartesiana del piano Π contenente la retta

$$r : \quad 3X - 2Y + 3Z + 1 = X - 2Y + Z - 1 = 0$$

e parallelo alla retta $s : \begin{cases} X = t \\ Y = 2t \\ Z = 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Soluzione: $X - 2Y + Z - 1 = 0$.

Esercizio 5. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale:

$$(1 + t^3)y' + 3t^2 y = \frac{1}{t}$$

e risolverne il problema di Cauchy $y(1) = 0$.

Soluzione: $y(t) = \frac{C + \log|t|}{|1+t^3|}, t \neq -1$. Cauchy: $\frac{\log t}{1+t^3}$ in $(0, +\infty)$.

Esercizio 6. Sia $R > 0$ e si consideri la curva differenziabile:

$$\alpha(t) = (R\cos^2 t, R\sin t\cos t, Rt), \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

(i) Verificare che la curva è regolare e calcolarne la lunghezza;
(ii) Nel punto $\alpha(\pi/4)$ se ne determini il triedro di Frenet.

Soluzione

(i) $\alpha'(t) = (-2R\cos t\sin t, R(\cos^2 t - \sin^2 t), R)$, $|\alpha'(t)| = \sqrt{2}R$.
La curva è regolare perchè $\alpha(t) \in C^1([0, \frac{\pi}{2}])$ e $|\alpha'(t)| \neq 0, \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
La lunghezza della curva è uguale a $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\alpha'(t)|dt = \frac{\sqrt{2}}{2}R\pi$.

(ii) $\alpha''(t) = (2R(\sin^2 t - \cos^2 t), -4R\cos t\sin t, 0)$.
$\alpha'(\pi/4) = (-R, 0, R)$, $\alpha''(\pi/4) = (0, -2R, 0)$.
$\alpha'(\pi/2) \wedge \alpha''(\pi/2) = (2R^2, 0, 2R^2)$.
$T(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$, $B(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$, $N(\pi/4) = (1, 1, 1)$.

Esercizio 7. Calcolare l'integrale $\displaystyle\iint_D e^{\frac{y}{x}} dx\, dy$ dove D è la regione del semipiano $x \leq -\frac{1}{2}$ compresa tra la parabola $y = 2x^2$ e la retta $y = -2x$.

Soluzione

$$A = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} dx \int_{2x^2}^{2x} e^{\frac{y}{x}} dy = \frac{1}{2e} - \frac{9}{8e^2}.$$

Esercizio 8. Calcolare la circuitazione in senso antiorario lungo la circonferenza Γ di centro l'origine e raggio $a > 0$ del campo vettoriale definito in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$V(x, y) = \left(\frac{x - y}{x^2 + y^2}, \frac{x + y}{x^2 + y^2} \right)$$

E' possibile dedurre dal risultato che V è conservativo? Motivare la risposta.

Soluzione

Introducendo coordinate polari si calcola:

$$\oint_\Gamma V = 2\pi$$

Pertanto il campo non è conservativo perché se lo fosse ogni circuitazione sarebbe nulla.