Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

GE220 - Geometria 3 - Secondo Appello: 7/7/2017

Docente: Margarida Melo

Durata: 3h15m

Nome del candidato:
Numero di matricola:

Esercizio 1. *(*4 punti*) Per ciascuno dei seguenti spazi topologici, indicare (senza giustificazione) l'interno, la chiusura, la frontiera, il derivato e le componente connesse.*

(i) $A_1 = \{(-1)^n - \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ *munito della topologia di sottospazio di* $\mathbb{R}$.

R:

(ii) $A_2 = [0,1] \subset \mathbb{R}$, *dove* $\mathbb{R}$ *è munito della topologia di Sorgenfrey.*

R:

(iii) $A_3 = \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$ *dove* $n \geq 2$.

R:

Esercizio 2. *(*14 punti*) Sia X uno spazio topologico. Stabilire, giustificando, se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.*

(i) La retta reale munita della topologia cofinita è irriducibile.

R:

(ii) Sia X uno spazio metrico. Alllora X è separabile.

R:

(iii) *In uno spazio metrico (X, d) la chiusura di una palla aperta $B_r(x) = \{y \in X : d(y, x) < r\}$ è la palla chiusa $\overline{B}_r(x) = \{y \in X : d(y, x) \leq r\}$.*

R:

(iv) *Sia $f : X \to Y$ una applicazione continua, dove Y è connesso. Allora anche X è connesso.*

R:

(v) *Tutte le mappe continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ sono costanti.*

R:

(vi) *Sia X uno spazio totalmente sconnesso. Allora X ha la topologia discreta.*

R:

(vii) *Uno spazio connesso è anche localmente connesso.*

R:

(viii) *Uno spazio contraibile è connesso per archi.*

R:

(ix) *Tutte le applicazione continue $f : S^2 \to S^1 \times S^1$ sono omotope alla applicazione costante.*

R:

(x) *Esiste un retratto da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.*

R:

Esercizio 3. *(*5 punti*) [Topologia di Zariski] Sia K un campo. Denotiamo con $\mathbb{A}^n$ lo spazio affine di dimensione n su K e con $S = K[x_1, \dots, x_n]$ l'annello dei polinomi in n indeterminate a coefficienti in K.*

Per ogni polinomio $f \in S$ definiamo $X_f := \{p \in \mathbb{A}^n : f(p) \neq 0\}$.

1. *Si dimostri che la famiglia $\mathcal{B} = \{X_f : f \in S\}$ è una base di una topologia su $\mathbb{A}^n$, detta topologia di Zariski.*
2. *Dimostrare che $\mathbb{A}^n$ con la topologia di Zariski è uno spazio topologico irriducibile. (Si ricordi che X si dice irriducibile se e solo se non esistono chiusi propri $C, D \subsetneq X$ tali che $X = C \cup D$.)*
3. *Descrivere la topologia di Zariski nel caso in cui $n = 1$ e stabilire quale topologia su $\mathbb{A}^n$ è più fine: quella di Zariski o quella euclidea?*

Esercizio 4. *(*5 punti*) Siano X e Y spazi topologici e sia $p : X \to Y$ una mappa continua che è chiusa e suriettiva. Si dimostri che:*

(i) *Dato $y \in Y$ e un aperto U di X contenendo $p^{-1}(y)$, existe un intorno W di y in Y tale che $p^{-1}(W) \subset U$.*

(ii) *Se X è normale anche Y è normale.*

(iii) *Assumiamo inoltre che p sia una mappa perfetta, cioè vale anche che $p^{-1}(y)$ è un compatto, per ogni y in Y. Si dimostri che in questo caso se X è di Hausdorff anche Y è di Hausdorff e che se Y è compatto anche X è compatto.*

Esercizio 5. *(*4 punti*)*

(i) *Sia Y uno spazio contraibile. Si dimostri che, per ogni spazio topologico X, la proiezione $p : X \times Y \to X$ è una equivalenza omotopica.*

(ii) *Sia $f : X \to Y$ una applicazione continua. Il* cilindro mappante *di f è lo spazio topologico M_f ottenuto a partire della unione disgiunta $(X \times I) \coprod Y$ identificando un punto $(x, 1) \in X \times I$ con $f(x) \in Y$. Si dimostri che esiste un retratto per deformazione da M_f a Y.*

Esercizio 6. *(*5 punti*)*

(i) *Si dimostri il seguente risultato riguardando l'unicità dei sollevamenti:*

Sia $p : \tilde{X} \to X$ un rivestimento e sia $f : Y \to X$ una mappa che ammette due sollevamenti $f_1, f_2 : Y \to \tilde{X}$. Allora, se Y è connesso, f_1 e f_2 devono coincidere su tutto Y.

(ii) *Sia $p : \tilde{G} \to G$ un omomorfismo di gruppi topologici (i.e., un omomorfismo di gruppi che è anche una mappa continua), che è anche un rivestimento. Si dimostri che se G è un gruppo abeliano anche $\tilde{G}$ è un gruppo abeliano.*

(Si riccordi che un gruppo topologico è un gruppo G che è anche uno spazio topologico T1 e tale che le operazioni di molteplicazione $m : G \times G \to G, m(g, g') = g \times g'$, e inverso $i : G \to G, i(g) = g^{-1}$, sono continue).