Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

GE220 - Geometria 3 - Secondo Appello: 7/7/2017

DOCENTE: MARGARIDA MELO

Durata: 3h15m

Nome del candidato:
Numero di matricola:

Esercizio 1. (4 punti) *Per ciascuno dei seguenti spazi topologici, indicare (senza giustificazione) l'interno, la chiusura, la frontiera, il derivato e le componente connesse.*

(i) $A_1 = \{(-1)^n - \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ *munito della topologia di sottospazio di* $\mathbb{R}$.

R: $int(A_1) = \emptyset$; $\overline{A}_1 = Fr(A_1) = A_1 \cup \{-1, 1\}$, $A_1' = \{-1, 1\}$.
A_1 è totalmente sconnesso, cioè $C(x) = \{x\}, \forall x \in A_1$.

(ii) $A_2 = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, *dove* $\mathbb{R}$ *è munito della topologia di Sorgenfrey.*

R: $int(A_2) = [0, 1)$; $\overline{A}_2 = A_2$, $Fr(A_2) = A_2' = \{0, 1\}$.
A_2 è totalmente sconnesso, cioè $C(x) = \{x\}, \forall x \in A_2$.

(iii) $A_3 = \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$ *dove* $n \geq 2$.

R: $int(A_3) = \emptyset$; $\overline{A}_3 = Fr(A_3) = A_3' = \mathbb{R}^n$.
A_3 è connesso, quindi $C(x) = A_3, \forall x \in A_3$.

Esercizio 2. (14 punti) *Sia* X *uno spazio topologico. Stabilire, giustificando, se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.*

(i) La retta reale munita della topologia cofinita è irriducibile.

R: Vero. I chiusi propri di $\mathbb{R}$ nella topologia cofinita sono fati prendendo un numero finito di punti. Quindi l'unione di due chiusi propri non potrebbe mai essere uguale a tutta la retta $\mathbb{R}$.

(ii) Sia X *uno spazio metrico. Alllora* X *è separabile.*

R: Falso. Basta prendere uno spazio non numerabile X, come ad esempio $\mathbb{R}$, munito della topologia discreta (si riccordi che la topologia discreta è indotta da una metrica).

(iii) In uno spazio metrico (X, d) *la chiusura di una palla aperta* $B_r(x) = \{y \in X : d(y, x) < r\}$ *è la palla chiusa* $\overline{B}_r(x) = \{y \in X : d(y, x) \leq r\}$.

R: Falso. Vedere esercizio 7 della esercitazione 1.

(iv) Sia $f : X \to Y$ *una applicazione continua, dove* Y *è connesso. Allora anche* X *è connesso.*

R: Falso. Si prenda ad esempio X dato da una unione disgiunta di spazi uguali ad Y. Sarebbe invece vero che l'imagine di un connesso è un connesso.

(v) Tutte le mappe continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ *sono costanti.*

R: Vero. Se l'imagine di una mappa continua da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Q}$ contenesse più di un punto, allora sarebbe sconnessa in quanto $\mathbb{Q}$ è totalmente sconnesso, il che non è possibile.

(vi) Sia X *uno spazio totalmente sconnesso. Allora* X *ha la topologia discreta.*

R: Falso. Ad esempio prendendo $X = A_1 \cup \{1\}$ avremo che X è ancora totalmente sconnesso ma non discreto poiché $\{1\}$ non è un aperto di X.

(vii) Uno spazio connesso è anche localmente connesso.

R: Falso. Prendendo ad esempio X il pettine del topologo unito il punto $\{(0,1)\}$,

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \cup ([0,1] \times 0) \cup \{(0,1)\}$$

vediamo che X è connesso anche se $\{(0,1)\}$ non ammette una base di intorni connessi.

(viii) Uno spazio contraibile è connesso per archi.

R: Vero. Sia $H : X \times [0,1] \to X$, una omotopia tra id_X e una mappa costante c_{x_0}. Allora ogni punto $x \in X$ è connesso per archi a x_0: un arco si ottiene prendendo $H(x,t), t \in [0,1]$. Per transitività, qualsiasi coppia di punti è connessa per archi.

(ix) Tutte le applicazione continue $f : S^2 \to S^1 \times S^1$ sono omotope alla applicazione costante.

R: Vero. Una tale applicazione, per il criterio di sollevamento, e per il fatto che S^2 è semplicemete connesso, ammette un sollevamento ad una mappa $\tilde{f} : S^2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Siccome ogni tale mappa è omotopa alla applicazione costante, componendo con la mappa di proiezione $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$ si ottiene il risultato.

(x) Esiste un retratto da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

R: Falso. Un tale ritratto indurrebbe una applicazione inniettiva tra i gruppi fondamentali $i_* : \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z} \to \pi_1(\mathbb{R}^2) \cong \{0\}$, il che non è possibile.

Esercizio 3. *(*5 punti*) [Topologia di Zariski] Sia K un campo. Denotiamo con $\mathbb{A}^n$ lo spazio affine di dimensione n su K e con $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ l'annello dei polinomi in n indeterminate a coefficienti in K.*

Per ogni polinomio $f \in S$ definiamo $X_f := \{p \in \mathbb{A}^n : f(p) \neq 0\}$.

1. *Si dimostri che la famiglia $\mathcal{B} = \{X_f : f \in S\}$ è una base di una topologia su $\mathbb{A}^n$, detta topologia di Zariski.*

2. *Dimostrare che $\mathbb{A}^n$ con la topologia di Zariski è uno spazio topologico irriducibile. (Si ricordi che X si dice irriducibile se e solo se non esistono chiusi propri $C, D \subsetneq X$ tali che $X = C \cup D$.)*

3. *Descrivere la topologia di Zariski nel caso in cui $n = 1$ e stabilire quale topologia su $\mathbb{A}^n$ è più fine: quella di Zariski o quella euclidea?*

R: Vedere esercitazione 2.

Esercizio 4. *(*5 punti*) Siano X e Y spazi topologici e sia $p : X \to Y$ una mappa continua che è chiusa e suriettiva. Si dimostri che:*

(i) *Dato $y \in Y$ e un aperto U di X contenendo $p^{-1}(y)$, existe un intorno W di y in Y tale che $p^{-1}(W) \subset U$.*

R: Essendo p chiusa, $F := p(X \setminus U)$ è un chiuso di Y che non contiene y. Allora $W := Y \setminus F$ è un intorno aperto di y tale che $p^{-1}(W) \subset U$.

(ii) *Se X è normale anche Y è normale.*

(iii) *Assumiamo inoltre che p sia una mappa perfetta, cioè vale anche che $p^{-1}(y)$ è un compatto, per ogni y in Y. Si dimostri che in questo caso se X è di Hausdorff anche Y è di Hausdorff e che se Y è compatto anche X è compatto.*

Esercizio 5. *(*4 punti*)*

(i) *Sia Y uno spazio contraibile. Si dimostri che, per ogni spazio topologico X, la proiezione $p : X \times Y \to X$ è una equivalenza omotopica.*

R: Sia $H_t : Y \to Y$ una omotopia tra id_Y e c_{y_0}, per un certo punto $y_0 \in Y$. Sia $i : X \to X \times Y, i(x) = (x, y_0)$. Allora abbiamo che $p \circ i = id_X$ e che $i \circ p \cong id_{X \times Y}$ dove l'omotopia è data ponendo $F_t : X \times Y \to X \times Y$, $F_t(x, y) = (x, H_t(y))$.

(ii) *Sia $f : X \to Y$ una applicazione continua. Il* cilindro mappante *di f è lo spazio topologico M_f ottenuto a partire della unione disgiunta $(X \times I) \coprod Y$ identificando un punto $(x, 1) \in X \times I$ con $f(x) \in Y$. Si dimostri che esiste un retratto per deformazione da M_f a Y.*

R: Un ritratto per deformazione si ottiene facendo scendere i punti che stano su $X \times I$ lungo I fino ad Y. Ossia, $H_t : M_f \to M_f$, $t \in [0, 1]$, dove $H_t(y) = y$ se $y \in Y$ e $H_t(x, s) = t + (1 - t)s$ dà l'omotopia desiderata. Infatti le H_t sono continue per il lemma di incollamento, $H_0 = id_{M_f}$ e $H_1(z) \in Y, \forall y \in Y$.

Esercizio 6. *(*5 punti*)*

(i) Si dimostri il seguente risultato riguardando l'unicità dei sollevamenti:

Sia $p : \tilde{X} \to X$ un rivestimento e sia $f : Y \to X$ una mappa che ammette due sollevamenti $f_1, f_2 : Y \to \tilde{X}$. Allora, se Y è connesso, f_1 e f_2 devono coincidere su tutto Y.

R: Vedere Prop. 1.34 sul libro di Hatcher.

(ii) Sia $p : \tilde{G} \to G$ un omomorfismo di gruppi topologici (i.e., un omomorfismo di gruppi che è anche una mappa continua), che è anche un rivestimento. Si dimostri che se G è un gruppo abeliano anche $\tilde{G}$ è un gruppo abeliano.

(Si riccordi che un gruppo topologico è un gruppo G che è anche uno spazio topologico T1 e tale che le operazioni di molteplicazione $m : G \times G \to G, m(g, g') = g \times g'$, e inverso $i : G \to G, i(g) = g^{-1}$, sono continue).

R: Sia $s : \tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G} \times \tilde{G}$ la mappa che scambia i fattori, $s(x, y) = (y, x)$, sia $m : \tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}$ la mappa di moltiplicazioni su $\tilde{G}$ e $\tilde{g}$ l'unità di $\tilde{G}$. Allora $\tilde{G}$ è abeliano se e soltanto se $m \circ s = m$. Il risultato segue applicando il risultato di sopra sulla unicità del sollevamento e osservando che queste due mappe coincidono su $(\tilde{e}, \tilde{e})$ e che la loro composizione con p coincide perché p è un omomorfismo di gruppi e la moltiplicazione in G è commutativa.