Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

GE220 - Geometria 3 - Terzo Appello: 11/9/2017

Docente: Margarida Melo

Durata: 3h15m

Nome del candidato:

Numero di matricola:

Esercizio 1. *(4 punti) Per ciascuno dei seguenti spazi topologici, indicare (senza giustificazione) l'interno, la chiusura, la frontiera, il derivato e le componente connesse.*

(i) $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\} \cup \{(0, 0)\}$ *munito della topologia di sottospazio di* $\mathbb{R}^2$.

R:

(ii) $A_2 = \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ *munito della topologia cofinita.*

R:

(iii) $A_3 = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^n$ *dove* $n \geq 2$.

R:

Esercizio 2. *(14 punti) Stabilire, giustificando, se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.*

(i) Sia X *uno spazio topologico tale che tutte le mappe* $f : Y \to X$ *sono continue, dove* Y *è uno spazio topologico qualunque. Allora la topologia su* X *è quella banale.*

R:

(ii) Uno spazio topologico infinito ammette sucessioni non convergenti.

R:

(iii) *Uno spazio che soddisfa il secondo assioma di numerabilità è separabile.*

R:

(iv) *Sia* $X = \prod_\alpha X_\alpha$ *di Hausdorff. Allora ogni fattore* X_α *è di Hausdorff.*

R:

(v) *Se* $A \subset \mathbb{R}$ *è paracompatto, allora* A *è un chiuso di* $\mathbb{R}$.

R:

(vi) $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{R}^n$ *sono omeomorfi se e solo se* $n = 1$.

R:

(vii) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ *munito della topologia euclidea è localmente connesso.*

R:

(viii) *Sia* $A \subset X$ *e sia* $r : X \to A$ *un retratto. Allora la mappa indotta sui gruppo fondamentali* $r_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(A, x_0)$, *dove* $x_0 \in A$, *è suriettiva.*

R:

(ix) *Un rivestimento di uno spazio semplicemente connesso è un omeomorfismo.*

R:

(x) *Esiste un rivestimento da* S^2 *a* S^1.

Esercizio 3. *(*5 punti*)*

Sia X uno spazio topologico e $S \subset X$ un sottoinsieme chiuso di X. Si dimostri che:

(i) Se X è de Lindelöf anche S è di Lindelöf.

(ii) Se X è normale allora anche lo spazio topologico ottenuto identificando S a un punto è normale.

Esercizio 4. *(*5 punti*) Sia X uno spazio topologico completamente regolare e Y una sua compattificazione. Sia $\beta(X)$ la compattificazione di Ston-Čech di X.*

(i) Dimostrare che esiste una mappa continua chiusa suriettiva $g : \beta(X) \to Y$ che si restringe all'identità su X.

(ii) Dimostrare che X è connesso se e solo se anche $\beta(X)$ è connessa.

Esercizio 5. *(*5 punti*)*

(i) Usando il teorema di van Kampen debole, dimostrare che S^n è semplicemente connessa per $n \geq 2$.

(ii) Sia A un retratto di D^2. Si dimostri che ogni mappa continua continua $f : A \to A$ ammette un punto fisso.

(iii) Sia $h : S^1 \to S^1$ una mappa omotopa a una mappa costante. Allora h ammette un punto fisso e esiste un punto $x \in S^1$ tale che $h(x) = -x$.

Esercizio 6. *(*5 punti*) Sia $p : \tilde{X} \to X$ un rivestimento.*

(i) Si dimostri che se $p^{-1}(x)$ è finito per ogni $x \in X$ allora $\tilde{X}$ è compatto e di Hausdorff se e soltanto se X è compatto e di Hausdorff.

(ii) Supponiamo che $\tilde{X}$ è semplicemente connesso e che $A \subset X$ è connesso per archi, localmente connesso per archi e che $\tilde{A}$ è una componente connessa per archi di $p^{-1}(A)$. Si dimostri che $p : \tilde{A} \to A$ è un rivestimento corrispondente al nucleo della mappa $\pi_1(A) \to \pi_1(X)$.