Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Ingegneria civile – a.a. 2015/2016
Complementi di Matematica (L-Z)
Quarto Appello – 17 Febbraio 2017.

Cognome e nome ______________________ **Matricola**_________

Specificare quale esame si deve sostenere: **Geometria** □ **Calcolo II** □

Esercizio 1. Si verifichi che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

definisce un prodotto scalare $\times$ in $\mathbb{R}^3$. Applicando alla base canonica il procedimento di Gram-Schmidt determinare una base ortogonale rispetto a $\times$.

Soluzione: A è una matrice simmetrica i cui minori principali sono positivi, quindi A è definita positiva e definisce un prodotto scalare. La base cercata è:

$$\{b_1 = e_1 = (1,0,0), \quad b_2 = (-1/2, 1, 0), \quad b_3 = e_3 = (0,0,1)\}$$

Esercizio 2. Si consideri la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$:

$$q(X,Y,Z) = Y^2 + Z^2 + 2XY$$

a) classificare q e determinarne la segnatura. b) trovare una base ortonormale rispetto alla quale q sia diagonalizzata. c) calcolarne l'espressione in tale base. d) Determinare una base di Sylvester e la forma canonica di Sylvester.

Soluzione: Matrice della forma bilineare simmetrica associata:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Autovalori: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \lambda_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

q è non degenere, indefinita. Segnatura $(2,1)$.

Autospazi: $V_1 = \langle(0,0,1)\rangle, V_2 = \langle(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1, 0)\rangle,\ V_3 = \langle(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, 1, 0)\rangle$,

Base ortonormale diagonalizzante: $\left\{(0,0,1), \sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}}(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1, 0), \sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}}(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, 1, 0), \right\}$

Espressione di q in tale base: $q(X_1, X_2, X_3) = X_1^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}X_2^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}X_3^2$.

Forma canonica di Sylvester: $X_1^2 + X_2^2 - X_3^2$.
Base di Sylvester: $\left\{(0,0,1), \frac{1}{\sqrt[4]{5}}(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1, 0), \frac{1}{\sqrt[4]{5}}(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, 1, 0)\right\}$

Esercizio 3. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ la conica C del piano $z = 0$ di equazione $3X^2 + 3Y^2 + 2XY + 6X + 2Y = 0$ e la retta s di equazioni parametriche

$$s : \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

(i) Dimostrare che C è una conica non degenere possedendo un centro di simmetria e calcolare il suo centro.

(ii) Determinare un'equazione cartesiana del piano Π contenente la retta s e che passa per il centro di simmetria di C.

Soluzione: (i) C è una ellisse non degenere perché la sua matrice associata è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

e $\det(A) = -24 \neq 0$, e la matrice $A_0 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ha determinante $8 > 0$. Il centro di C è $(-1, 0, 0)$.

(ii) $\Pi : X - Y + 1 = 0$.

Esercizio 4. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale:

$$y' + y = \sin e^x$$

e risolverne il problema di Cauchy $y(0) = 0$.

Soluzione: $y(x) = -e^{-x} \cos e^x + ce^{-x}$. Cauchy: $-e^{-x} \cos e^x + e^{-x} \cos 1, x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5. Si consideri la curva C in $\mathbb{R}^3$, detta "curva di Viviani", parametrizzata da:

$$\alpha(t) = \left(\cos^2 t - \frac{1}{2}, \sin t \cos t, \sin t \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

i) Mostrare che C è contenuta nella sfera di raggio 1 e centro $(-\frac{1}{2}, 0, 0)$.

ii) Nel punto $\alpha(0)$ si determini il triedro di Frenet e un'equazione del piano osculatore.

Risposta:

Soluzione: i) Basta verificare che i parametri di C soddisfano l'equazione

$$(x + \frac{1}{2})^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

ii) $\alpha(0) = (\frac{1}{2}, 0, 0)$, $\alpha'(0) = (0, 1, 1)$, $\quad \alpha''(0) = (-2, 0, 0)$, $\quad \alpha'(0) \wedge \alpha''(0) = (0, -2, 2)$.
Quindi:

$$T(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1), \quad B(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1), \quad N(0) = (-1, 0, 0)$$

Piano osculatore: $-Y + Z = 0$.

Esercizio 6. Utilizzando integrali doppi, calcolare il volume del solido compreso tra il paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2 - 3$ e il piano $z = 0$.

Soluzione

$$V = \iint_D (3 - x^2 - y^2) dx\, dy$$

dove D è il cerchio di equazione $x^2 + y^2 \leq 3$.

In coordinate polari abbiamo

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} (3-\rho^2)\rho \, d\rho \, d\theta = \frac{9\pi}{2}.$$

Esercizio 7. Si consideri il campo vettoriale definito in $\mathbb{R}^3$:

$$V(x,y,z) = (e^{yz}, xze^{yz}, xye^{yz}).$$

(1) Mostrare che V è conservativo e calcolarne un potenziale.
(2) Calcolare $\int_{\gamma_1} V.ds$ e $\int_{\gamma_2} V.ds$ dove γ_1 è la circonferenza del piano $z=0$ di raggio 2 con centro nell'origine percorsa in senso anti-orario e $\gamma_2 \subseteq \gamma_1$ è la semicirconferenza data dai punti $(x,y,0)$ tali che $y \leq 0$.

Soluzione

Il campo è conservativo perché il dominio è semplicemente connesso e il suo rotazionale è nullo. Un potenziale di V è $f(x,y,z) = xe^{yz}$.

Siccome γ_1 è una curva chiusa e V è conservativo, $\int_{\gamma_1} V.ds = 0$, mentre $\int_{\gamma_2} V.ds = f(2,0,0) - f(-2,0,0) = 4$.