Esercitazione del 13 aprile 2016

Esercizio 1 Il piano π di $\mathbb{R}^3$ di giacitura $\pi_0 : \mathcal{L}(\bar{u}, \bar{v})$, con $\bar{u} = (1,1,1)$ e $\bar{v} = (1,2,0)$ passante per $P = (1,0,0)$:

a) Ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 + k + h \\ y = k + 2h \\ z = k \end{cases}$ $k, h \in \mathbb{R}$

b) Una direzione normale a π è $\bar{n}_* = (1,1,1) \wedge (1,2,0) = (-2,1,1)$

c) Usando un determinante π ha equazione cartesiana

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ovvero} \quad \pi: 2x - y - z - 2 = 0$$

d) La retta $r: \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - y + kz + d = 0 \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$ è parallela a π se $2l - m - n = 0$

dove $l = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & k \end{vmatrix}$ $m = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \end{vmatrix}$ $n = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ sono i parametri direttori di r.

Si ha $(l, m, n) = (-2k, -k, 3)$ e deve essere, dunque, $-4k + k - 3 = 0 \Rightarrow k = -1$

La retta r risulta perpendicolare a π se $(2, -1, -1) = \rho(-2k, -k, 3)$ con ρ coefficiente di proporzionalità; deve dunque essere $\begin{matrix} 2 = -2k\rho \\ -1 = -k\rho \\ -1 = 3\rho \end{matrix}$ che porta all'uguaglianza $2 = -2$ assurdo; quindi r non può essere perpendicolare a π.

La retta r interseca π in $P = r \cap \pi$ se $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & k \end{vmatrix} \neq 0$ ovvero se $k \neq -1$

Esercizio 2

Siano π_1 il piano di equazioni parametriche

$$(*) \begin{cases} x = 1 + u + v \\ y = 2 + u - v \\ z = 3 + u \end{cases} \quad u, v \in \mathbb{R} \qquad \text{e } \pi_2 \text{ il piano } \pi_2: x - y + z + 1 = 0$$

a) Da $(*)$ si ha $\begin{cases} x = 1 + u + v \\ x + y = 3 + 2u \\ -u + z = 3 \end{cases} \rightarrow \pi_1: x + y - 2z + 3 = 0$

b) $r = \pi_1 \cap \pi_2$ è t.c. $r: \begin{cases} x+y-2z+3=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=s \\ y=5+3s \\ z=4+2s \end{cases} \quad s\in\mathbb{R}$

queste sono le equazioni parametriche di r.

c) La retta $\tilde{t}: \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=3+2t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$, e ~~la~~ retta r sono sghembe

Infatti r è parallela a $(1,3,2)$ mentre $\tilde{t}$ è parallela a $(1,-1,2)$ quindi le due rette non sono parallele.

Per stabilire se sono incidenti o sghembe si risolve il sistema

$$\begin{cases} 1+t=s \\ 2-t=5+3s \\ 3+2t=4+2s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+t=s \\ 4t=-6 \\ 3=6 \end{cases}$$

Essendo l'ultima equazione impossibile, il sistema non ha soluzioni e le rette sono sghembe.