Esercizio 1 | (Esercitazione 20 ott. 2016) 1

a) La retta $s: \begin{cases} x-3y-4=0 \\ y+z+2=0 \end{cases}$ (1) è parallela alla retta $r: \begin{cases} x-y+2z+1=0 \\ x-2y+z+2=0 \end{cases}$ (2)

con $s \subseteq \pi: x-y+2z=0$.

Dimostrazione

La giacitura di r, ~~…~~, è data dalle equazioni $\begin{cases} x-y+2z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$; Una retta parallela ad r ha, come r, direzione $(l,m,n)=\left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\right)=(3,1,-1)$

dunque è $s: \begin{cases} x=p_1+3t \\ y=p_2+t \\ z=p_3-t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$; affinché sia $s\subseteq\pi$ il generico punto di

s, sia esso $S(t)=(p_1+3t, p_2+t, p_3-t)$, deve verificare l'equazione di π,

ovvero deve essere $p_1+\cancel{3t}-p_2-\cancel{t}+2p_3-\cancel{2t}=0 \rightarrow p_1-p_2+2p_3=0$ relazione

verificata, ad esempio, per $p_1=1$, $p_2=-1$, $p_3=-1$ dunque è $s: \begin{cases} x=1+3t \\ y=-1+t \\ z=-1-t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ da cui la (1).

Si noti che è $3-1-2=0$ ovvero è verificata la condizione di parallelismo tra π e il vettore $(3,1,-1)$

b) La retta $u: \begin{cases} x=-t \\ y=3t \\ z=2 \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ è ortogonale alla retta r di equazioni (2)

e si ha $u: \begin{cases} y+3x=0 \\ z=2 \end{cases}$

c) La retta $\rho: \begin{cases} 2x+y-2=0 \\ y+2z=0 \end{cases}$ è contenuta nel piano $\alpha: 2x+y-2=0$ ed è

sghemba a r di equazione (2)

Dimostrazione

La condizione di parallelismo di v_ρ con α, fornisce la condizione $2l+m=0 \rightarrow m=-2l$

quindi è $\rho: \begin{cases} x=q_1+tl \\ y=q_2-2lt \\ z=q_3+nt \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

La retta ρ è contenuta in α se risulta che il generico punto di ρ, sia

esso $R(t)=(q_1+tl, q_2-2lt, q_3+nt)$, verifica l'equazione di α,

ovvero se $2q_1+\cancel{tl2}+q_2-\cancel{2lt}-2=0$ ~~relazione~~ verificata $\forall q_3$, quindi, ad esempio, per la terna $(a_1, a_2, a_3) = (1,0,0)$

Dunque, risulta, $\rho : \begin{cases} x = 1 + t\ell \\ y = -2t\ell \\ z = mt \end{cases}$ da cui $\rho : \begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ my + 2z\ell = 0 \end{cases}$

ρ deve essere sghemba con r, quindi deve essere

$$D = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & m & 2\ell & 0 \end{vmatrix} = m(-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} + 2\ell(-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8m - 2\ell \neq 0$$

se $m \neq \frac{\ell}{4}$; ad esempio la terna $(\ell, m, n) = (\ell, -2\ell, \ell) = (1, -2, 1)$ verifica

le condizioni richieste e si ha $\rho : \begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$