Esercitazione del 27.4.2016

Esercizio 1 Ridurre a forma canonica la conica $\mathcal{C}: 5x^2+5y^2-6xy+16\sqrt{2}x+38=0$

Poiché $\det A = \begin{vmatrix} 38 & 8\sqrt{2} & 0 \\ 8\sqrt{2} & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -32$ $\det A_{00} = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 25-9=16>0$

si ha una conica generale ($\det A \neq 0$) che è un'ellisse ($A_{00}>0$)

Il centro è il punto $C=(a,b)$ t.c. $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 8\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ da cui $C=\left(-\frac{5}{2}\sqrt{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

$(A_{00}-\lambda I)$: $\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-8)(\lambda-2)$ quindi gli autovalori di A_{00} sono $\lambda=2$, $\lambda=8$

dunque l'autospazio di 8, V_8, è $\{(x,-x)=x(1,-1) : x\in\mathbb{R}\}$
l'autospazio di 2, V_2, è $\{(x,x)=x(1,1) : x\in\mathbb{R}\}$

Da qui, una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$, è (dalla normalizzazione delle due basi di autospazi di cui sopra) $b=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. dove $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\bar{\imath}'$
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\bar{\jmath}'$

Risulta $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \to \begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x'+y') \end{cases}$ che sostituite nell'equazione

di $\mathcal{C}$, forniscono $\mathcal{C}: \frac{5}{2}(x'+y')^2+\frac{5}{2}(-x'+y')^2-\frac{6}{2}(x'+y')(-x'+y')+16\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(x'+y')+38=0$

ovvero $\mathcal{C}: 8(x')^2+2(y')^2+16x'+16y'+38=0$ (*) Quanto sopra fatto è stato necessario per eliminare il termine in xy dell'equazione di $\mathcal{C}$ e corrisponde ad una rotazione degli assi; si passa, quindi, dal riferimento $RC(O,\bar{\imath},\bar{\jmath})$ al riferimento $RC(O,\bar{\imath}',\bar{\jmath}')$ di base b e stessa origine del precedente

Tramite il completamento del quadrato, da (*) si ha

$8((x')^2+2x')+2((y')^2+8y')+38=0$ ovvero $8(x'+1)^2+2(y'+4)^2-2=0$

ponendo $\begin{cases} X=x'+1 \\ Y=y'+4 \end{cases}$ (ovvero operando un cambiamento di coordinate del tipo $\begin{cases} x'=X-1 \\ y'=Y-4 \end{cases}$) si passa dal riferimento $RC'(O,\bar{\imath}',\bar{\jmath}')$ al riferimento $RC''(O',\bar{\imath}',\bar{\jmath}')$ con coordinate X, Y riferimento in cui O' ha coordinate $x'=-1$, $y'=-4$

Nelle coordinate X, Y si ha $\mathcal{C}: 8X^2+2Y^2=2 \to \frac{X^2}{\frac{1}{4}}+Y^2=1$

Questa è l'equazione canonica dell'ellisse di semiassi $(\alpha, \beta) = (\frac{1}{2}, 1)$.

ESERCIZIO 2 Data la conica $\gamma_t : x^2 + (1-t)y^2 + 2t - 2(1-t)y + 2 - t = 0$ si ha

$\gamma_t : x^2 + (1-t)y^2 - 2(1-t)y + t + 2 = 0$ la cui matrice associata è A_t t.c.

$$D_t = \det A_t = \begin{vmatrix} t+2 & 0 & -(1-t) \\ 0 & 1 & 0 \\ -(1-t) & 0 & 1-t \end{vmatrix} = -(1-t)(2t+1) \qquad A_{00} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-t \end{vmatrix} = 1-t$$

• γ_t è una conica ~~generale~~ generale se $D_t \neq 0$ ovvero se $t \neq 1 \wedge t \neq -\frac{1}{2}$

e si ha $\begin{cases} \text{ellisse se } A_{00} > 0 \text{ ovvero se } t < 1 \\ \text{iperbole se } A_{00} < 0 \text{ ovvero se } t > 1 \\ \text{parabola se } A_{00} = 0 \text{ ovvero se } t = 1 \end{cases}$ $\left\{ \text{coniche a centro con } A_{00} \neq 0 \right.$

Per le coniche a centro, si ha che il centro $C = (x, y)$ è t.c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (1-t)y = -(1-t) \end{cases} \rightarrow C = (0, -1) \ (\text{con } t \neq 1)$

• Se $D_t = 0$, γ_t è una conica semplicemente degenere, poiché $rg(A_1) = rg\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

e $rg \ A_{-\frac{1}{2}} = rg \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = 2$

• $\gamma_0 : x^2 + y^2 - 2y + 2 = 0$ che non è una circonferenza reale poiché CNES poiché $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ rappresenti una circonferenza reale di centro $P = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$

e raggio $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$ è che $a^2 + b^2 - 4c > 0$.

ESERCIZIO 3 La retta $s : \begin{cases} kx - y + 1 = 0 \\ 2x - z + d = 0 \end{cases}$ è parallela alla retta $r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$

con $s \subseteq \alpha : 5x - 3y + 2z - 1 = 0$ se $k = 3$ e $d = 2$; infatti, riguardo alle direzioni di r e s,

$(l_r, m_r, n_r) = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) = (1, 3, 2)$

$(l_s, m_s, n_s) = \left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} k & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} k & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right) = (1, k, 2)$

risulta che $P = (0, 1, d)$ è un punto di s perché ne verifica le equazioni cartesiane

Dunque s ha equazioni parametriche $s : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 3t \\ z = d + 2t \end{cases} t \in \mathbb{R}$ e si ha $s \subseteq \alpha$ se

$S(t) = (t, 1+3t, d+2t) \in \alpha$ ovvero se $\cancel{5}t - 3 - \cancel{9}t + 2d + 4t - 1 = 0$ ovvero se $d = 2$

ESERCIZIO 4) In $\mathbb{R}^3$, munito di prodotto scalare standard, $\bar{v}_3 = (1,2,0)$, mentre

$$\bar{v}_3^{\perp} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z),(1,2,0)\rangle = 0\} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y=0\}$$

quindi $\bar{v}_3^{\perp} = \{(-2y, y, z) = y(-2,1,0) + z(0,0,1) : y,z\in\mathbb{R}\}$

$\mathcal{L}(\bar{v}_1,\bar{v}_2)$ è il sottospazio generato da $\bar{v}_1 = (1,2,-2)$ e $\bar{v}_2 = (1,0,1)$ e si ha che $\mathcal{L}(\bar{v}_1,\bar{v}_2)^{\perp} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z),(1,2,-2)\rangle = 0 \text{ e } \langle (x,y,z),(1,0,1)\rangle = 0\}$

ovvero $\mathcal{L}(\bar{v}_1,\bar{v}_2)^{\perp} : \begin{cases} x+2y-2z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \longrightarrow \mathcal{L}(\bar{v}_1,\bar{v}_2)^{\perp} = \{(-z, \frac{3}{2}z, z) : z\in\mathbb{R}\}$ ed ha dunque base $b = (-1, \frac{3}{2}, 1)$

ESERCIZIO 5). Il punto simmetrico del punto $P = (x_1, x_2)$ rispetto a $C = (c_1, c_2)$ è il punto $Q = C - \overline{CP} = C + \overline{PC} = P + 2\overline{PC} = (2c_1 - x_1, 2c_2 - x_2)$

- la simmetria ~~ortogonale~~ rispetto alla retta $r \subset \mathbb{R}^2$ passante per l'origine e formante un angolo $\phi\in[0,\frac{\pi}{2}]$ con l'asse delle x è l'applicazione

$S_\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $P \mapsto S_\phi(P)$ con $S_\phi(P)$ t.c. $\overline{S_\phi(P)\pi_r(P)} = \overline{\pi_r(P)P}$ con $\pi_r(P)$ proiezione ortogonale di P su r.

Risulta $S_\phi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\phi) & \sin(2\phi) \\ \sin(2\phi) & -\cos(2\phi)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}$

con $\det A = -\cos^2(2\phi) - \sin^2(2\phi) = -[\cos^2(2\phi) + \sin^2(2\phi)] = -1$ $\begin{pmatrix} \text{isometria} : A : A^tA = I \\ \text{inversa} : \det A = -1 \end{pmatrix}$

inoltre $AA = \begin{pmatrix} \cos^2(2\varphi) + \sin^2(2\varphi) & 0 \\ 0 & \sin^2(2\varphi) + \cos^2(2\varphi)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ (involuzione)