Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017
GE220 - Geometria 3 - Esercitazione 2: 13/03/2017

Docente: Prof. Margarida Melo
Esercitatore: Luca Tasin

Esercizio 1. *Sia $X \subset \mathbb{N}$ l'insieme dei numeri interi maggiori o uguali a 2. Per ogni $n \in X$ si consideri l'insieme*

$$U_n = \{x \in X : x \text{ divide } n\}.$$

Sia $\mathcal{B} = \{U_n\}_{n \in X}$.

1. *Si dimostri che $\mathcal{B}$ è una base per una topologia su X. Indichiamo con τ tale topologia.*
2. *Si dimostri che per ogni $x \in X$, $\overline{\{x\}} = \{y \in X : x|y\}$.*
3. *Sia $f : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ una funzione continua. Si dimostri che f è costante.*

Esercizio 2. *a) Dimostrare che la famiglia*

$$\mathcal{F} = \{[a, b] : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$$

non è una base per alcuna topologia su $\mathbb{R}$ e si determini la più piccola topologia su $\mathbb{R}$ per la quale $\mathcal{F}$ è una famiglia di aperti.

b) Dimostrare che la famiglia

$$\mathcal{G} = \{[a, b] : a < b, a \in \mathbb{Q}, b \notin \mathbb{Q}\}$$

è una base per una topologia su $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. *Uno spazio topologico si dice irriducibile se non esistono chiusi propri $C, D \subsetneq X$ tali che $X = C \cup D$.*

1. *Si mostri che ogni spazio discreto con almeno due punti è riducibile.*
2. *Si mostri che la retta euclidea reale è riducibile.*
3. *Si mostri che ogni spazio infinito con la topologia cofinita è irriducibile.*

Esercizio 4. *Sia X uno spazio topologico. Si dimostri che le seguenti condizioni sono equivalenti.*

(i) *X è irriducibile.*

(ii) *Se U e V sono aperti non vuoti di X, allora $U \cap V \neq \emptyset$.*

(iii) Ogni aperto non vuoto U di X è denso in X, i.e. $\bar{U} = X$.

Esercizio 5 (Topologia di Zariski)**.** *Sia K un campo. Denotiamo con $\mathbb{A}^n$ lo spazio affine di dimensione n su K e con $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ l'annello dei polinomi in n indeterminate a coefficienti in K.*

Per ogni polinomio $f \in S$ definiamo $X_f := \{p \in \mathbb{A}^n : f(p) \neq 0\}$.

1. *Si dimostri che la famiglia $\mathcal{B} = \{X_f : f \in S\}$ è una base di una topologia su $\mathbb{A}^n$, detta topologia di Zariski.*

2. *Dimostrare che $\mathbb{A}^n$ con la topologia di Zariski è uno spazio topologico irriducibile.*

3. *I chiusi in questa topologia sono detti chiusi di Zariski o sottoinsiemi algebrici di $\mathbb{A}^n$. Quali sono i sottoinsiemi algebrici di $\mathbb{A}^1$?*

4. *Si dimostri che un sottoinsieme Z di $\mathbb{A}^n$ è algebrico se e solo se esistono un numero finito di polinomi $f_1, \ldots, f_r \in S$ tali che*

$$Z = \{p \in \mathbb{A}^n : f_1(p) = \ldots f_r(p) = 0\}.$$

5. *Determinare quale topologia su $\mathbb{A}^n$ è più fine: quella di Zariski o quella euclidea?*