Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017
GE220 - Geometria 3 - Esercitazione 3: 20/03/2017

Docente: Prof. Margarida Melo
Esercitatore: Luca Tasin

Esercizio 1. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(x+y) = f(x) + f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Si dimostri che $f(x) = kx$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dove $k = f(1)$.*

Definizione 1. *Sia $f : S \to T$ una funzione fra insiemi. Un sottoinsieme $A \subset S$ è detto* saturo *(rispetto a f) se $A = f^{-1}(f(A))$ (si noti che vale sempre $A \subset f^{-1}(f(A))$).*

Lemma 1 ([Ser, Lemma 7.1])**.** *Sia $p : X \to Y$ un'applicazione continua e suriettiva fra spazi topologici. Se per ogni aperto saturo $A \subset X$, $p(A)$ è aperto in Y, allora p è un'identificazione.*

Fatto. *Siano X e Y spazi topologici e sia $p : X \to Y$ un'identificazione. Allora Y è omeomorfo al quoziente $X/\sim_p$ dove*

$$x \sim_p y \Leftrightarrow p(x) = p(y).$$

Dimostrazione. Poniamo $Z := X/\sim_p$ e $\pi : X \to Z$ la proiezione naturale (che è un'identificazione per definizione di topologia quoziente). Per definizione di $\sim_p$ esiste una mappa biettiva $g : Y \to Z$ tale che $\pi = g \circ p$. La conclusione segue quindi da [Ser, Prop. 7.4] □

Esercizio 2. *Ricordiamo che se A è un sottoinsieme di uno spazio topologico X, si indica con $X/A = X/\sim_A$ il quoziente di X per la relazione di equivalenza data da*

$$x \sim_A y \text{ se e solo se } x = y \text{ oppure } x, y \in A.$$

Si dimostri che $I = [0,1]$ e $I/[1/2, 1]$ sono omeomorfi.

Esercizio 3. *Su $I^2 = I \times I$ consideriamo la relazione di equivalenza $\sim$ che identifica il punto $(0,t)$ con il punto $(1,t)$ per ogni $t \in I$, il punto $(s,0)$ con il punto $(0,s)$ per ogni $s \in I$ e lascia ogni altro punto equivalente solo a se stesso. Si dimostri che $I^2/\sim$ è omeomorfo al toro $T = S^1 \times S^1$.*

Si consideri la mappa $h : I^2 \to \mathbb{R}^3$ data da

$$h(s,t) = ((2 + \cos(2\pi s))\cos(2\pi t), (2 + \cos(2\pi s))\sin(2\pi t), \sin(2\pi s)).$$

Si dimostri che h induce un omeomorfismo fra $I^2/\sim$ e un sottospazio di $\mathbb{R}^3$. Si disegni tale sottospazio.

Definizione 2 (Gruppo topologico)**.** *Un gruppo topologico G è un gruppo che è anche uno spazio topologico tale che le operazioni di gruppo $G \times G \to G$ data da $(x,y) \mapsto xy$ e $G \to G$ data da $x \mapsto x^{-1}$ siano funzioni continue.*

Esempi: $(\mathbb{R}^n, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$ *e* $GL(\mathbb{R}, n)$.

Esercizio 4. *Sia G un gruppo. Assumiamo che G sia anche uno spazio topologico. Dimostrare che G è un gruppo topologico se e solo se la mappa $G \times G \to G$ data da $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ è continua.*

Esercizio 5. *Sia G un gruppo topologico e sia $a \in G$.*

1. *Dimostrare che le mappe di traslazione $x \mapsto ax$ e $x \mapsto xa$ sono omeomorfismi.*

2. *Sia H un gruppo topologico e $f : G \to H$ un omomorfismo di gruppi. Dimostrare che f è una mappa continua se e solo se è continua in $1 \in G$.*

Riferimenti bibliografici

[Ser] E. Sernesi. *Geometria 2*, Bollati Boringhieri 2006.