Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

GE220 - Geometria 3 - Esercitazione 4: 27/03/2017

Docente: Prof. Margarida Melo
Esercitatore: Luca Tasin

Esercizio 1. *Dimostrare che uno spazio metrizzabile X è normale.*

Esercizio 2. *Sia X uno spazio T_1. Dimostrare che X è regolare se e solo se per ogni punto $p \in X$ e ogni aperto U contenente p esiste un aperto V tale che*

$$p \in V \subset \bar{V} \subset U.$$

Esercizio 3. *Sia X uno spazio separabile contenente un sottoinsieme S chiuso, discreto e non numerabile. Allora X non è normale.*

Esercizio 4. *Sia $(\mathbb{R}, \tau)$ la retta di Sorgenfrey.*

1. *Si dimostri che $(\mathbb{R}, \tau)$ è normale.*
2. *Si dimostri che $(\mathbb{R}, \tau) \times (\mathbb{R}, \tau)$ non è normale (pur essendo regolare, in quanto prodotto di spazi regolari).*

Esercizio 5. *Sia $\mathbb{R}^{n+1}$ lo spazio vettoriale reale di dimensione $n+1$. Su $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ consideriamo la relazione d'equivalenza $\sim$ data da: $x \sim y$ se esiste $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ tale che $y = \lambda x$. Quindi due punti sono equivalenti se e solo se appartengono alla stessa retta.*

Lo spazio quoziente $\mathbb{P}^n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ è detto spazio proiettivo (reale) di dimensione n. Sia $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ la proiezione canonica.

1. *Se $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ denoteremo con $[x_0, \ldots, x_n]$ il punto $\pi(x) \in \mathbb{P}^n$. Per ogni $i = 0, \ldots, n$ sia*

   $$U_i = \{[x_0, \ldots, x_n] : x_i \neq 0\}.$$

   Dimostrare che U_i è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

2. *Dimostrare che $H_i = \mathbb{P}^n \setminus U_i$ è omeomorfo a $\mathbb{P}^{n-1}$. H_i è detto iperpiano all'infinito rispetto a U_i.*

Esercizio 6. *Sia $\mathbb{R}^{n+1}$ lo spazio vettoriale reale $(n+1)$-dimensionale dotato della topologia euclidea. Consideriamo la relazione di equivalenza su $\mathbb{R}^{n+1}$ data da*

$$x \sim y \text{ se esiste } \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0 \text{ tale che } y = \lambda x.$$

Sia $X := \mathbb{R}^{n+1}/\sim$ lo spazio quoziente. Dire se X è T_0, T_1 o T_2.