Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

GE220 - Geometria 3 - Esercitazione 5: 05/04/2017

DOCENTE: PROF. MARGARIDA MELO
ESERCITATORE: LUCA TASIN

Esercizio 1. *Sia* $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ *lo spazio euclideo reale. Si consideri la famiglia*

$$\tau = \{X \subset \mathbb{R} : X = \emptyset \text{ oppure } \mathbb{R} \backslash X \text{ è compatto in } (\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)\}.$$

1. *Si dimostri che* τ *è una topologia su* $\mathbb{R}$.
2. *Dire se* $(\mathbb{R}, \tau)$ *è* T_0, T_1 *o* T_2.

Esercizio 2. *Su* $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *con la topologia euclidea consideriamo la relazione di equivalenza data da* $x \sim y$ *se e solo se* $y = \pm x$.

1. *Dimostrare che lo spazio quoziente* $S^n/\sim$ *è omeomorfo a* $\mathbb{P}^n$.
2. *Dimostrare che* $\mathbb{P}^n$ *è compatto e di Hausdorff.*
3. *Dimostrare che* $\mathbb{P}^1$ *è omeomorfo a* S^1.

Esercizio 3. *Si consideri la funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *data da* $x \mapsto 0$ *se* $x \in \mathbb{Q}$ *e* $x \mapsto x$ *se* $x \notin \mathbb{Q}$. *Sia* τ_ε *la topologia euclidea e sia* τ *la topologia meno fine su* $\mathbb{R}$ *tale che* $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ *è continua.*

1. *Descrivere gli intorni aperti e la chiusura di* $\{0\}, \{1\}$ *e* $\{\pi\}$ *in* $(\mathbb{R}, \tau)$.
2. *Dire se* $(\mathbb{R}, \tau)$ *è compatto,* T_0, T_1 *o* T_2.

Esercizio 4 (Compattificazione di Alexandroff)**.** *Sia* $X = \mathbb{R}^n$ *lo spazio vettoriale reale* n*-dimensionale con la topologia euclidea* τ_ε *e sia* σ *la famiglia degli insiemi compatti di* (X, τ_ε). *Sia* ∞ *un punto formale* ($\infty \notin X$) *e si ponga* $X^* = X \cup \{\infty\}$. *Si consideri su* X^* *la seguente famiglia*

$$\tau^* = \{U \subset X \subset X^* : U \in \tau_\varepsilon\} \cup \{U \subset X^* : X^* \backslash U \in \sigma\}.$$

1. *Si dimostri che* τ^* *è una topologia.*
2. *Si dimostri che* (X^*, τ^*) *è compatto.*
3. *Si dimostri che* (X^*, τ^*) *è di Hausdorff.*
4. *Si dimostri che* (X^*, τ^*) *è omeomorfo alla sfera* S^n. *In particolare,* $(\mathbb{R}^*, \tau^*)$ *è omeomorfo a* $\mathbb{P}^1$.