Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

GE220 - Geometria 3 - Esercitazione 6: 24/04/2017

DOCENTE: PROF. MARGARIDA MELO

ESERCITATORE: LUCA TASIN

Esercizio 1. *Sia X uno spazio topologico. Si dimostrino le seguenti implicazioni.*

X compatto $\Longrightarrow$ X numerabilmente compatto $\Longleftarrow$ X compatto per successioni.

Esercizio 2. *In $\mathbb{N}$ si consideri la topologia τ generata dagli insiemi $\{2n-1, 2n\}$, $n \geq 1$. Si dimostri che $(\mathbb{N}, \tau)$ è numerabilmente compatto, ma non è compatto né compatto per successioni.*

Definizione 1. *Sia X uno spazio metrizzabile. Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X. Un numero real $\varepsilon > 0$ è detto* numero di Lebesgue *di $\mathcal{U}$ se ogni disco aperto di raggio ε è contenuto in un elemento di $\mathcal{U}$.*

Esercizio 3. *Dimostrare che esiste un ricoprimento di $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ che non possiede un numero di Lebesgue.*

Proposizione 1. *([Ser][Prop. 10.8]) Sia X uno spazio metrizzabile compatto per successioni. Allora ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di X possiede un numero di Lebesgue.*

Teorema 1. *([Ser][Thm. 10.9]) Sia X uno spazio metrizzabile. Le seguenti condizioni sono equivalenti.*

(a) X è compatto.

(b) X è numerabilmente compatto.

(c) X è compatto per successioni.

Esercizio 4. *Sia X uno spazio metrizzabile non compatto. Dimostrare che esiste una funzione continua non limitata $f : X \to \mathbb{R}$.*

Esercizio 5. *Dimostrare che $\mathbb{Q}$ non è localmente compatto.*

Proposizione 2. *([Ser][Prop. 10.3]) Sia X uno spazio topologico localmente compatto di Hausdorff che soddisfa il secondo assioma di numerabilità. Aloora X è unione di una famiglia numerabile di sottoinsiemi compatti $\{K_i : i = 1, 2, \ldots\}$ tali che $K_i \subset \mathrm{Int}(K_{i+1})$ per ogni i.*

Riferimenti bibliografici

[Ser] E. Sernesi. *Geometria 2*, Bollati Boringhieri 2006.