Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

GE220 - Geometria 3 - Esercitazione 7: 08/05/2017

DOCENTE: PROF. MARGARIDA MELO
ESERCITATORE: LUCA TASIN

Esercizio 1. *Sia X uno spazio topologico completamente regolare e Y una sua compattificazione. Sia $\beta(X)$ la compattificazione di Ston-Čech di X. Dimostrare che esiste una mappa continua chiusa suriettiva $g : \beta(X) \to Y$ che si restringe all'identità su X.*

Esercizio 2. *Sia X uno spazio topologico completamente regolare. Dimostrare che X è connesso se e solo se la sua compattificazione di Ston-Čech è connessa.*

Esercizio 3. *Dimostrare che $I = [0, 1]$ e S^1 non sono omeomorfi.*

Esercizio 4. *Dimostrare che per ogni $t \in \mathbb{R}$ il sottospazio di $\mathbb{R}^2$ definito come*

$$X_t = \{(x, y) : xy = t\}$$

non è omeomorfo ad $\mathbb{R}$.

Esercizio 5. *Sia $X \subset \mathbb{R}^2$ l'unione di due circonferenze di raggio 1 e centri $(1, 0)$ e $(-1, 0)$ rispettivamente. Dimostrare che X non è omeomorfo né a S^1 né a $I = [0, 1]$.*

Esercizio 6. *Dimostrare che se X è uno spazio topologico localmente connesso in un punto $p \in X$, allora p è interno alla sua componente connessa $\mathcal{C}(p)$.*

Dimostrare che le componenti connesse di uno spazio topologico localmente connesso X sono sottoinsiemi aperti di X.

Esercizio 7 (Il pettine e la pulce)**.** *Per ogni intero $n \geq 1$, consideriamo*

$$A_n = \{(\frac{1}{n}, y) : 0 \leq y \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

e definiamo

$$A = \cup_{n \geq 1} A_n \cup \{(x, 0) : 0 < x \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

(tale spazio è detto pettine topologico). Sia $p = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$ (la pulce).

1. *Dimostrare che $\overline{A}$ è uno spazio topologico connesso per archi, ma non localmente connesso.*

2. *Poniamo $B = A \cup \{p\}$. Dimostrare che B è connesso, ma non connesso per archi.*