Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

GE220 - Geometria 3 - Esercitazione 8: 15/05/2017

Docente: Prof. Margarida Melo
Esercitatore: Luca Tasin

Esercizio 1. *Sia X un insieme infinito e sia $p \in X$. Si consideri la seguente famiglia di insiemi*

$$\tau = \{A \subset X : p \notin A\} \cup \{A \subset X : X \backslash A \text{ è finito}\}.$$

1. *Si dimostri che τ è una topologia su X.*
2. *Si dica se (X, τ) è connesso e se è compatto.*

Esercizio 2. *Ricordiamo che una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ è localmente costante se per ogni punto $x \in X$ esiste un intorno aperto $U \subset X$ di x, tale che $f_{|U} : U \to \mathbb{R}$ è costante. Sia X uno spazio topologico connesso. Si dimostri che ogni funzione continua $f : X \to \mathbb{R}$ localmente costante è costante.*

Esercizio 3. *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione continua e biunivoca tale che $f(S^{n-1}) = S^{n-1}$. Dimostrare che $f(D_1(0)) = D_1(0)$.*

Esercizio 4. *Dimostrare che ogni applicazione continua $f : [a, b] \to [a, b]$ di un intervallo reale chiuso e limitato in sé stesso ha un punto fisso, cioè esiste $x \in [a, b]$ tale che $f(x) = x$.*

Esercizio 5. *Sia Y uno spazio topologico. Dimostrare che un'applicazione continua $f : S^1 \to Y$ è omotopa ad un'applicazione costante se e solo se f si estende ad un'applicazione continua $g : D^2 \to Y$.*

Esercizio 6. *Dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra, dimostrare cioè che ogni polinomio non costante a coefficienti complessi ha almeno una radice complessa.*