Esercizi di Complementi di Matematica (L-Z) a.a. 2015/2016

Prodotti scalari e forme bilineari simmetriche

(1) Sia $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ un'applicazione definita da
$$F(\overline{x}, \overline{y}) = x_1y_1 + 3x_1y_2 - 5x_2y_1 + 2x_2y_2$$
dove $\overline{x} = (x_1, x_2)$ e $\overline{y} = (y_1, y_2)$ sono le coordinate di $\overline{x}$ e $\overline{y}$ rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^2$.
(a) Dimostrare che F è bilineare ma non è simmetrica;
(b) Calcolare la matrice di F relativa alla base standard di $\mathbb{R}^2$.

(2) Sia $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ un'applicazione definita da
$$F(\overline{x}, \overline{y}) = x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2,$$
dove $\overline{x} = (x_1, x_2)$ e $\overline{y} = (y_1, y_2)$ sono le coordinate di $\overline{x}$ e $\overline{y}$ rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^2$.
(a) Dimostrare che F è una forma bilineare simmetrica ma non è un prodotto scalare;
(b) Calcolare la matrice di F relativa alla base standard.
(c) Calcolare la matrice di F relativa alla base $b = \{(1, 0), (1, -1)\}$
(d) Usare il criterio dei minori principali per dimostrare che F non è un prodotto scalare.

(3) Usare il criterio dei minori principali per dimostrare che la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$
è definita positiva.

(4) Determinare i valori di x e y tali che la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & y & x \\ 0 & 1 & 2 \\ x & 2 & 5 \end{pmatrix}$$
sia definita positiva.

(5) Sia S una matrice simmetrica di ordine q e sia $F : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineare tale che $S = B_u(F)$, dove $u = \{\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_q\}$ è una base di V. Dimostrare che F è un prodotto scalare se e solo se S è definita positiva.

(6) Dimostrare il criterio dei minori principali per matrici 2×2.

Spazi euclidei

(1) Si consideri $\mathbb{R}^2$ munito dal prodotto scalare standard e siano $u = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ la base standard e $b = \{b_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), b_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})\}$.
  (a) Verificare che b è una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$.
  (b) Scrivere la matrice del prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^2$ relativamente alla base b.
  (c) Trovare tutti i vettori ortogonali ad $u = (1, 1)$ e con norma uguale a 2.
  (d) Calcolare le coordinate di $v = (2, 3)$ e $w = (-1, 1)$ rispetto a b e il valore di $\langle v, w\rangle$ rispetto alle due basi (che deve essere uguale).

(2) (a) In $\mathbb{R}^3$, munito dal prodotto scalare standard, si consideri la base $b = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ con $\overline{v}_1 = (1, 0, 1), \overline{v}_2 = (0, 1, 1)$ e $\overline{v}_3 = (0, 1, -1)$. Usare il procedimento di Gram-Schmidt per trovare la base ortonormale associata a b.
  (b) Stesso esercizio con $b = \{(1, 1, 1), (3, 3, 0), (1, 2, 3)\}$.
  (c) Verificare che le matrici di cambiamento di base dalle base b sopra alla base canonica sono ortogonali.

(3) Si consideri la matrice A data da

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

  (a) Si verifiche che A definisce un prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$ in $\mathbb{R}^3$.
  (b) Applicare il procedimento di Gram-Schmidt alla base canonica e costruire una base ortogonale rispetto a $\langle\ ,\ \rangle$.
  (c) Trovare una equazione lineare per il sottospazio ortogonale a $\overline{e}_1$ rispetto a $\langle\ ,\ \rangle$.

(4) Sia $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(\overline{x}, \overline{y}) = 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_2y_2$, dove $\overline{x} = (x_1, x_2)$ e $\overline{y} = (y_1, y_2)$ sono le componenti di $\overline{x}$ e $\overline{y}$ rispetto alla base canonica.
  (a) Verificare che F è una applicazione bilineare.
  (b) Calcolare la matrice di F relativamente alla base canonica e concludere che F è un prodotto scalare.
  (c) Considerata la base b data dai vettori $\overline{v}_1 = \overline{e}_1 + \overline{e}_2$ e $\overline{v}_2 = 2\overline{e}_1 - \overline{e}_2$, determinare la matrice di F rispetto alla base b.

(5) In $\mathbb{R}^3$ munito dal prodotto scalare standard $\langle\ ,\ \rangle$ si considerino i vettori $\overline{v}_1 = (1, 2, -2)$, $\overline{v}_2 = (1, 0, 1)$ e $\overline{v}_3 = (1, 2, 0)$.
  (a) Determinare $\|\overline{v}_1\|$, $\langle\overline{v}_1, \overline{v}_2\rangle$, $\theta(\overline{v}_1, \overline{v}_2)$ e $\theta(\overline{v}_1, \overline{v}_3)$.
  (b) Determinare $\overline{v}_3^{\perp}$ e $\mathcal{L}(\overline{v}_1, \overline{v}_2)^{\perp}$.
  (c) Calcolare la proiezione ortogonale di $\overline{v}_1$ su $\overline{v}_3$ e scrivere $\overline{v}_1$ come combinazione lineare di un vettore in $\mathcal{L}(\overline{v}_3)$ con un vettore in $\mathcal{L}(\overline{v}_3)^{\perp}$.

(6) Sia $U \subseteq V$ un sottospazio di uno spazio vettoriale V. Sia $u = \{u_1, \ldots, \overline{u}_s\}$ una base di U. Dimostrare che $U^{\perp} = \overline{u}_1^{\perp} \cap \cdots \cap \overline{u}_s^{\perp}$.

Forme quadratiche

(1) Scrivere la matrice delle seguenti forme quadratiche su $\mathbb{R}^3$, rispetto alla base canonica: $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_3 - 5x_2x_3$; $Q(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 - 3x_1x_2 + 5x_2x_3 + x_3^2$ e $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

(2) Sia $b = \{(1, 0, 0), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$ una base di $\mathbb{R}^3$. Scrivere la matrice delle forme quadratiche Q definite sopra relativamente alla base b utilizzando due metodi diversi.

(3) Dimostrare che, se N una matrice quadrata qualsiasi, allora la matrice $A =^t NN$ è simmetrica.

(4) Sia $g = \{\overline{g}_1, \overline{g}_2\}$ con $\overline{g}_1 = e_1 + \overline{e}_2$ e $\overline{g}_2 = 2\overline{e}_1 + \overline{e}_2$ una base di $\mathbb{R}^2$. Si consideri $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'operatore lineare tale che $S(\overline{g}_1) = \overline{g}_1 + \overline{g}_2$ e $S(\overline{g}_2) = \overline{g}_1 - \overline{g}_2$.
   (a) Scrivere la matrice associata all'operatore S nella base g e osservare che è simmetrica;
   (b) Dimostrare che S non è autoaggiunto e discutere questo fatto alla luce di (a).

(5) Dimostrare che ogni matrice simmetrica di ordine $n \leq 3$ ha tutti gli autovalori reali.

(6) (*) Sia $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ uno spazio euclideo e F un'operatore autoaggiunto su V. Dimostrare che, se $\overline{u}$ è un autovettore di F, allora $F(\overline{u}^\perp) \subseteq \overline{u}^\perp$. Concludere che la restrizione di F al sottospazio $\overline{u}^\perp$ è ancora un'operatore autoaggiunto su $\overline{u}^\perp$.

(7) Sia $Q(\overline{x}) = x_1x_2$ una forma quadratica in $\mathbb{R}^2$ relativamente alla base canonica e.
   (a) Scrivere la matrice associata a Q relativamente a e.
   (b) Trovare una base ortonormale a di $\mathbb{R}^2$ tale che la matrice di Q relativa a a sia diagonale.
   (c) Scrivere la matrice di Q in base a.
   (d) Determinare il rango e la segnatura di Q.
   (e) Trovare la base di Sylvester di Q e la rispettiva forma di Sylvester.

(8) Stesso esercizio per le forme quadratiche in $\mathbb{R}^3$
$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3,$$
$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2,$$
$$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3 + 3x_3^2,$$
$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.$$

(9) Sia A la matrice simmetrica data da
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
Trovare una matrice ortogonale M tale che ${}^tMAM$ sia diagonale.

Geometria del piano cartesiano

(1) (a) Sia r la retta di equazione cartesiana $x_1 - 2x_2 + 3 = 0$. Trovare una equazione parametrica di r.
(b) Sia s la retta di equazioni parametriche $x_1 = 1 + t, x_2 = 3 - 2t$, $t \in \mathbb{R}$. Trovare una equazione cartesiana di s.
(c) Concludere che r e s sono perpendicolari fra di loro e determinare $P = r \cap s$.

(2) Sia s_1 la retta con equazioni parametriche $x_1 = 1 - 2t$, $x_2 = 0$, $t \in \mathbb{R}$, e s_2, s_3 di equazioni cartesiane $x_1 - 2x_2 + 1 = 0$ e $2x_1 + x_2 - 2 = 0$, rispettivamente.
(a) Scrivere vettori direttori di s_1, s_2 e s_3 e determinare se le rette date sono parallele, concorrenti o perpendicolari.
(b) Determinare una equazione cartesiana di s_1;
(c) Determinare una equazione cartesiana della retta r parallela a s_1 e passante per $P = s_2 \cap s_3$;
(d) Determinare le equazioni parametriche della retta n passante per $Q = s_1 \cap s_2$ e perpendicolare a s_3;
(e) Verificare che la retta che passa per i punti $Q_1 = (1, \frac{1}{4})$ e $Q_2 = (2, \frac{1}{4})$ è parallela a s_2. Stabilire se tale retta coincide con s_2.

(3) Siano r e s due rette di equazioni cartesiane rispettivamente $r: 2x_1 + x_2 = 0$ e $s: x_1 - 2x_2 + 1 = 0$.
(a) Determinare la posizione relativa tra r e s, determinando il loro angolo e calcolare il punto di intersezione $r \cap s$.
(b) Scrivere una equazione del fascio proprio ϕ determinato da r e s e le coordinate del centro di ϕ.
(c) Determinare l'unica retta di ϕ passante per il punto $p = (1, 0)$ e per l'origine.
(d) Determinare l'unica retta di ϕ paralela all'asse delle ordinate e quella paralela alla retta di equazione parametrica $(x_1, x_2) = (1, 2) + t(1, 0), t \in \mathbb{R}$.
(e) Determinare l'unica retta di ϕ perpendicolare alla retta di equazione $m: x_1 + x_2 = 0$.
(f) Scrivere l'equazione del fascio di rette improprio Ω definito da m.
(g) Determinare l'unica retta di Ω che passa per l'origine.

(4) Dimostrare che il fascio di rette improprio Ω determinato da una retta r di equazione $ax_1 + bx_2 + c = 0$ è dato dalla famiglia

$$\Omega_t : \{ax_1 + bx_2 + t = 0\}, t \in \mathbb{R}.$$

(5) Siano r e s rette di $\mathbb{R}^2$ di equazioni $x_1 - 2x_2 + 8 = 0$ e $3x_1 - x_2 - 1 = 0$ rispettivamente.
(a) Dimostrare che r e s si intersecano in un unico punto $Q \in \mathbb{R}^2$ usando un determinante.
(b) Sia m la retta di equazione $2x_1 + x_2 - 1 = 0$. Trovare le equazioni della retta parallela a m che passa per Q, di nuovo usando un determinante.

Geometria dello spazio cartesiano

(1) Sia π il piano di $\mathbb{R}^3$ di giacitura $\pi_0 = \mathcal{L}(\overline{u}, \overline{v})$, dove $\overline{u} = (1,1,1)$ e $\overline{v} = (1,2,0)$, e passante per il punto $P = (1,0,0)$.
   (a) Scrivere equazioni parametriche per π;
   (b) Trovare una direzione normale a π;
   (c) Scrivere una equazione cartesiana di π usando una equazione determinantale.
   (d) Sia r la retta di $\mathbb{R}^3$ data dalle equazioni cartesiane
   $$x - 2y = 0 = 2x - y + mz + d = 0.$$
   Discutere, a seconda dei valori di m e d, la posizione relativa di r e π.

(2) Siano π e π' piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane date da $x_1+x_2+x_3 = 0$ e $x_1 - x_2 + x_3 + 1 = 0$.
   (a) Trovare una equazione parametrica per la retta r di $\mathbb{R}^3$ ottenuta intersecando π e π'.
   (b) Scrivere equazioni cartesiane per il fascio di piani Φ di $\mathbb{R}^3$ determinato da π e π'.
   (c) Determinare le equazioni del piano di Φ che passa per l'origine.
   (d) Determinare le equazioni del fascio di piani impropri Ω determinato da π' che passa per il punto $P = (1,0,0)$.

(3) Siano $A = (0,1,0), B = (1,1,1)$ e $C = (2,1,m)$ tre punti di $\mathbb{R}^3$.
   (a) Determinare, a seconda di m, se i tre punti sono allineati o no.
   (b) In entrambi i casi determinati nel punto precedente, scrivere equazioni per il piano passante per i tre punti, se non allineati, e della retta passante per i tre punti, se allineati.

(4) Sia r la retta data dalle equazioni cartesiane $x_1 - x_2 + 2x_3 + 1 = 0 = x_1 - 2x_2 + x_3 + 2$. Trovare equazione cartesiane per
   (a) La giacitura di r;
   (b) Una retta parallela a r contenuta nel piano $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$;
   (c) Una retta ortogonale a r;
   (d) Una retta sghemba a r contenuta nel piano π di equazioni $2x_1 + x_2 - 2 = 0$.

Affinità ed isometrie nel piano cartesiano

(1) Scrivere le equazioni lineari che descrivono la simmetria relativamente al punto $P = (a,b) \in \mathbb{R}^2$. Concludere che le simmetrie relativamente a un punto sono isometrie.

(2) La simmetria relativamente alla retta $r \subset \mathbb{R}^2$ passante per l'origine e facendo un'angolo $\phi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, con l'asse delle ascisse è l'applicazione $S_\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che ad un punto $P \in \mathbb{R}^2$ associa il punto $S_\phi(P)$ tale che $\overline{S_\phi(P)\pi_r(P)} = \overline{\pi_r(P)P}$, dove $\pi_r(P)$ è la proiezione ortogonale di P nella retta r.
   (a) Scrivere la matrice che determina S_ϕ;
   (b) Concludere che tutte tali applicazioni S_ϕ sono isometrie inverse e, in più, che sono involuzioni.

Coniche del piano cartesiano

(1) Classificare le coniche di equazioni $x_1x_2 = 1$ e $x_1^2 - x_1x_2 + x_2 + 1 = 0$ relativamente al rango e al segno del determinante
(2) Trovare la forma canonica metrica della conica di equazioni $x_1x_2 = 1$ tramite una isometria del piano.
(3) Effettuare un cambio di variabili affine per trovare la forma canonica della conica di equazioni $x_1^2 + 4x_2^2 = 9$.
(4) Dato il seguente fascio di coniche

$$\gamma_t : x^2 + (1-t)y^2 + 2t - 2(1-t)y + 2 - t = 0$$

determinare i valori del parametro t per cui γ_t è:
(a) una parabola;
(b) una conica a centro, e determinare le coordinate del centro,
(c) una iperbole;
(d) una ellisse con punti reali,
(e) una circonferenza;
(f) una conica degenere;
(g) una ellisse senza punti reali.
(5) Trovare le forme canoniche delle coniche di equazioni
(a) $x^2 + 3xy + 2y^2 + x + 2y = 0$;
(b) $3x^2 + 2xy + 3y^2 + x + 2y + 1 = 0$;
(c) $x^2 + 6xy + y^2 - 3 = 0$;
(d) $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8 = 0$;
(e) $x^2 + 2xy + y^2 + 4x = 0$;
(f) $x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x + 2 = 0$;
(g) $4x^2 + 4xy + y2 + 2x + y = 0$.

Calcolo per le curve

(1) Una linea materiale non omogenea è disposta a forma di spirale di Archimede, di equazione polare $\rho = A\theta, \theta \in [0, 4\pi]$. La sua densità lineare è $d = B\theta$.
(a) Calcolare la massa totale della linea materiale.
(b) Calcolare

$$\int_\gamma \theta^3 ds.$$

(2) Determinare il momento di inerzia dell'arco di parola $y = x^2, x \in [-1, 1]$, omogenea di densità ρ, che ruota attorno all'asse y.
(3) Disegnare la cicloide di equazioni

$$\begin{cases} x = R(1 - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

e calcolarne la lunghezza.
(4) Determinare l'integrale di linea $\int_\gamma x ds$ dove γ è l'arco di iperbole $y = \frac{1}{x}, x \in [\frac{1}{2}, 2]$. Interpretare il significato geometrico del risultato.

(5)
$$\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t, \quad t \in [0, 2\pi] \\ z = t \end{cases}$$
(a) Verificare che la curva è regolare e calcolarne la lunghezza;
(b) Si calcoli l'area della superficie compresa tra la curva e la sua proiezione nell piano coordinato XOY.

(6) Gli esercizi su elementi di geometria differenziale delle curve sono quelli proposti al canale A-K in
http://www.mat.uniroma3.it/users/sernesi/ComplMat1516/esercizi6.html

Calcolo per funzioni da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$

(1) Rappresentare sul piano i domini delle funzioni seguenti e dire per ciascuno se si tratta di insiemi aperti, chiusi, limitati o connessi.
(a) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$;
(b) $f(x,y) = \log \dfrac{x}{y}$;
(c) $f(x,y) = \log \dfrac{x+y}{x-y}$;
(d) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\log\left(2 - (x^2+y^2)\right)}$;
(e) $f(x,y,z) = \arctan \dfrac{x^2+y^2}{(z-1)^2}$.

(2) Identificare e rappresentare nello spazio gli insiemi seguenti e, per ciascuno, dire se sono aperti, chiusi, limitati, connessi e determinarne l'interno, la chiusura e la frontiera:
(a) $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$;
(b) $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 4z^2 < 1 = 0\}$;
(c) $E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z < 1\}$.

(3) Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:
(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$;
(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;
(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\sin x}{x^2+y^2}$;
(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$;
(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \log\frac{x}{y}$;

(4) Per quali valori di $a > 0$ la funzione
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^{2a}+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
è continua in $\mathbb{R}^2$. Determinare anche, caso esistano, le derivate parziali in $(0,0)$.

(5) Data la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^2}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

(a) stabilire se è continua e derivabile in $(0,0)$;
(b) stabilire se è continua e derivabile in

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |y|\leq x\leq 1\}.$$

(6) Determinare per quali valori di α il piano tangente al grafico di

$$z=f(x,y)=\sin(\alpha x+y^2)$$

nel punto $(0,\sqrt{\pi},0)$ è parallelo alla retta $x=y=2z$. Esistono valori di α per cui è perpendicolare?

(7) Data la funzione $f(x,y)=y^4e^{3x}$, determinare per quali versori v la derivata $D_vf(0,-1)$ è massima e nulla, rispettivamente.

(8) Data la funzione

$$f(x,y)=e^{x^2}(\alpha x-y^3),\quad \alpha\in\mathbb{R},$$

determinare α in modo che
(a) la direzione di massima crescita in $(0,1)$ sia lungo la tangente alla parabola $y=(x+1)^2$ nel verso negativo dell'asse x;
(b) il piano tangente in $(0,1)$ sia perpendicolare alla retta $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=z$.

(9) Dimostrare che non esiste alcuna funzione $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$f_x=x\sin y\quad f_y=y\cos x.$$

(10) Dimostrare che le funzioni $f(x,y)=\arctan\frac{x+y}{x-y}$ e $g(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$ sono armoniche nel loro dominio, ossia che soddisfano l'equazione $f_{xx}+f_{yy}=0$.

(11) Determinare gli estremi assoluti della funzione $f(x,y)=2-x^2-y^2$ in $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 2\}$.

(12) Determinare gli eventuali estremi globali e locali della funzione $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

(13) Determinare gli eventuali massimi e minimi locali delle funzione
(a) $f(x,y)=x^3y^2-x^4y^2-x^3y^3$;
(b) $f(x,y)=\sin(x+y)-\cos(x-y)$;
(c) $f(x,y,z)=x^2-2x+y^2+\log(1+z^2)$.

Integrali doppi

(1) Rappresentare nel piano i domini

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2}\leq y\leq x^2, 1\leq x\leq 2\};$$

e

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq x\leq y^2, 0\leq y\leq\sqrt{\pi}\}.$$

(a) Determinare l'area di entrambi.
(b) Calcolare $\displaystyle\iint_D\frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ e $\displaystyle\iint_E\frac{\sin y^2}{y}\,dx\,dy$.

(2) Calcolare $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, dove $f(x,y) = \begin{cases} x+y & x+y-1 \geq 0 \\ 2x-y^2 & x+y-1<0 \end{cases}$
e $D = [0,1] \times [0,1]$.

(3) Negli integrali iterati

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x} f(x,y)\,dy\,dx \quad \text{e} \quad \int_{-1}^{1}\int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx,$$

scambiare l'ordine di integrazione.

(4) Si consideri una lamina di densità costante Δ rappresentata nel piano dalla regione D delimitata dalla parabola $y^2 = 2x$ e dalla retta $x = 2$.
  (a) Calcolare le coordinate $(\overline{x}, \overline{y})$del baricentro della lamina (si ricordi che $\overline{x} = \int_D x\rho(x,y)\,dx\,dy$ e che $\overline{y} = \int_D y\rho(x,y)\,dx\,dy$);
  (b) Calcolare il momento di inerzia I relativamente all'asse degli z (si ricordi che $I = \overline{x} = \int_D \delta^2(x,y)\rho(x,y)\,dx\,dy$, dove δ è la funzione che indica la distanza all'asse in questione).

(5) Si consideri la lamina piata C la cui frontiera è il cardioide di equazione in coordinate polari $\rho = 1 + \cos\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi]$.
  (a) Rappresentare C;
  (b) Calcolarne la massa sapendo che la densità è costante.
  (c) Calcolare le coordinate del baricentro.

(6) Calcolare l'integrale

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x+y}{1+(x-y)^2}\,dy\,dx$$

utilizzando il cambiamento di variabili $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$.

(7) Calcolare il volume del cono di altezza h e raggio della base r.

(8) Calcolare il volume del solido compreso tra il paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$ e il piano $z = 2$.