Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

GE220 - Geometria 3 - Primo foglio di esercizi

Docente: Margarida Melo

Da consegnare entro: **22/03/2017**

Esercizio 1. *Dimostrare che i seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^n$ *non sono aperti rispetto alla distanza euclidea:*
$\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x}\| \leq 1\}$, $\{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x}\| = 1\}$, $\{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} = (\frac{1}{m}, 0, \ldots, 0), m \in \mathbb{N}\}$
Per ciascuno di questi, calcolare la chiusura, la frontiera e il derivato.

Esercizio 2. *Sia* d *la distanza euclidea su* $\mathbb{R}^2$ *e* $\underline{0}$ *l'origine di* $\mathbb{R}^2$*. Consideriamo la funzione*

$$d^* : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

definita da

$$d^*(x,y) = \begin{cases} d(x,\underline{0}) + d(\underline{0},y) & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y. \end{cases}$$

(i) Si dimostri che d^* *è una metrica su* $\mathbb{R}^2$*.*

(ii) Si descrivano tutti i dischi aperti per la metrica d^**.*

(iii) La topologia τ_{d^*} *indotta da* d^* *è strettamente più fine della topologia euclidea* τ_d *indotta da* d*.*

Esercizio 3. *Si denoti con* $\mathbb{R}_l$ *l'insieme dei numeri reali munito della topologia di Sorgenfrey o del limite inferiore, cioè la topologia avendo come base gli insiemi del tipo*

$$\mathcal{B} := \{[a,b) : a \leq b \in \mathbb{R}\}.$$

(i) Si dimostri che $\mathcal{B}$ *definisce una base per una topologia* $\mathbb{R}$*.*

(ii) Si dimostri che $\mathbb{R}_l$ *è uno spazio topologico strettamente più fine di* $\mathbb{R}$ *munito della topologia euclidea.*

(iii) La applicazione identità $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_l$ *è continua? E invece la stessa applicazione identità con le topologie scambiate* $id : \mathbb{R}_l \to \mathbb{R}$*?*

(iv) Si dimostri che $\mathbb{R}_l$ *è separabile ma non soddisfa il secondo assioma di numerabilità.*

Esercizio 4. *Un sottoinsieme A di uno spazio topologico X si dice denso da nessuna parte se la sua chiusura non contiene nessun aperto non vuoto di X. Si dimostre che*

(i) La frontiera di un aperto di X è un sottoinsieme di X chiuso e denso da nessuna parte.

(ii) Conversamente, un chiuso denso da nessuna parte di X è la frontiera di un aperto di X.

Esercizio 5.

Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ due funzioni continue che coincidono su un sottoinsieme denso S di X. Si dimostre che f e g coincidono su tutto X.

Esercizio 6. *Una funzione continua e suriettiva $r : X \to A$ da uno spazio topologico X in uno suo sottospazio si dice un retratto di A se $r_{|A}$ è l'applicazione identità da A in A. Si dimostre che*

(i) $\mathbb{Q}$ non è un retratto di $\mathbb{R}$.

(ii) Il disco unitario $\overline{D}_1(0,0) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ di $\mathbb{R}^2$ è un retratto di $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 7. *Una proprietà di spazi topologici si dice* topologica *se viene preservata per omeomorfismo.*

(i) Si dimostre che la seguente è una proprietà topologica: "ogni funzione continua a valori in $\mathbb{R}$ assume un valore massimo".

(ii) Si concluda che $\mathbb{R}$ e l'intervallo $I = [0,1]$ non sono omeomorfi.